Ministerul Educației, Cercetării, Tineretului și Sportului
Centrul Național de Evaluare și Examinare

Examenul de bacalaureat național 2013

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(3x+2)^2=4$.

5p **2.** Determinați numărul real m pentru care vârful parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^2+3mx+1$ are abscisa egală cu $\frac{3}{2}$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x}=9$.

5p **4.** Calculați $5C_4^2-A_5^2$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-6,3)$ și $B(2,5)$. Determinați coordonatele mijlocului segmentului (AB).

5p **6.** Calculați lungimea diagonalei BD a rombului $ABCD$ în care $AB=4$ și $m(\sphericalangle ABC)=120^\circ$.

Soluții

Subiectul1

1. $(3x+2)^2=4\Leftrightarrow 9x^2+12x+4=4\Leftrightarrow 9x^2+12x=0\Leftrightarrow x(9x+12)=0$ care are soluțiile $x_1=0$ și $x_2=-\frac{4}{3}$.

2. Varful unei parabole este $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Abscisa este $-\frac{b}{2a}=-\frac{3m}{-2}=\frac{3m}{2}$

Punem condiția $\frac{3m}{2}=\frac{3}{2}$ de unde rezultă $m=1$.

3. $3^{2x}=3^2\Rightarrow 2x=2\Rightarrow x=1$.

4. $C_4^2=\frac{4!}{2!(4-2)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot2\cdot1\cdot2}=6$.

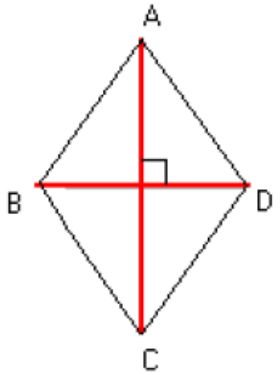
$A_5^2=\frac{5!}{(5-2)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3}=20$.

$5C_4^2-A_5^2=5\cdot6-20=10$.

5. Mijlocul uni segment este $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

In cazul nostru avem $M\left(\frac{-6+2}{2},\frac{3+5}{2}\right)\Rightarrow M(-2,4)$.

6. Figura este mai jos



Triunghiul ABD este isoscel cu unghiul $BAD = 60^0$ deci este echilateral.
Rezultă $BD = 4$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & x \\ 2 & -1 & x \\ x & x & 2 \end{pmatrix}$ şi se notează determinantul ei cu $\Delta(x)$.

5p **a)** Calculaţi $\Delta(1)$.

5p **b)** Arătaţi că $\Delta(x) = 6(x^2 - 1)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinaţi inversa matricei $A(0)$.

2. În $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 + aX + b$.

5p **a)** Calculaţi $a + b$, ştiind că $f(1) = 0$.

5p **b)** Pentru $a = -1$ şi $b = 1$, determinaţi rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinaţi numerele reale a şi b, ştiind că $x_1 = 1$ şi $x_2 = 2$ sunt rădăcini ale polinomului f.

Subiectul 2

1.a) $\Delta(1) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 + 2 + 1 + 1 - 8 = 0$

b) $\Delta(x) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & x \\ 2 & -1 & x \\ x & x & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2x^2 + 2x^2 + x^2 + x^2 - 8 = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1)$

c) $A(0) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Etapa 1

$\Delta(0) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6(0^2 - 1) = -6$

Etapa 2

Matricea transpusă este ${}^tA(0)=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

Etapa 3

Matricea adjunctă este $A(0)^*=\begin{pmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23}\\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33}\end{pmatrix}$

$\delta_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot d_{ij}$ unde d_{ij} este un determinant de ordinul doi care se obţine prin inlăturarea liniei i şi coloanei j in matricea transpusă.

$$\delta_{11}=(-1)^{1+1}\cdot d_{11}=d_{11}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-2$$

$$\delta_{12}=(-1)^{1+2}\cdot d_{12}=-d_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-4$$

$$\delta_{13}=(-1)^{1+3}\cdot d_{13}=d_{13}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

$$\delta_{21}=(-1)^{2+1}\cdot d_{21}=-d_{21}=-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-4$$

$$\delta_{22}=(-1)^{2+2}\cdot d_{22}=d_{22}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-2$$

$$\delta_{23}=(-1)^{2+3}\cdot d_{23}=-d_{23}=-\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

$$\delta_{31}=(-1)^{3+1}\cdot d_{31}=d_{31}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}=0$$

$$\delta_{32}=(-1)^{3+2}\cdot d_{32}=-d_{32}=-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix}=0$$

$$\delta_{33}=(-1)^{3+3}\cdot d_{33}=d_{33}=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3$$

$$\Rightarrow A(0)^*=\begin{pmatrix}-2 & -4 & 0\\ -4 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

Etapa 4

$$\Rightarrow A(0)^{-1}=\frac{1}{\Delta(0)}\cdot A(0)^*=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2 & -4 & 0\\ -4 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\ 4 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

2.a) $f(1)=1^3-1^2+a+b=a+b=0$ deci $a+b=0$.

b)

$$f=X^3-X^2-X+1=(X^3+1)-(X^2+X)=(X+1)(X^2-X+1)-X(X+1)=(X+1)(X^2-2X+1)=$$
$$=(X+1)(X-1)^2$$

Rezultă că f are rădăcinile $x_1=1$, $x_2=1$ şi $x_3=-1$.

c)Punem condiţiile $f(1)=0$ şi $f(2)=0$.

$f(1)=a+b=0$

$f(2)=2a+b+4=0$

Se obţine sistemul

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b=-4 \end{cases}$$

care are soluţiile $a=-4$ şi $b=4$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x\ln x$.
5p	**a)** Verificați dacă $f'(x)=1+\ln x$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Arătați că funcția f este crescătoare pe $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.
5p	**c)** Demonstrați că $f(x)\geq-\frac{1}{e}$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}$.
5p	**a)** Verificați dacă funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x-\frac{1}{x}+\ln x$ este o primitivă a funcției f.
5p	**b)** Calculați $\int_1^e x\cdot f(x^2)\,dx$.
5p	**c)** Determinați numărul real $a>1$, pentru care $\int_1^a\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=\frac{3}{2}$.

Subiectul 3

1.a) Pentru derivare se foloseşte formula $(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$

$f'(x)=(x\ln x)'=x'\ln x+x(\ln x)'=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=1+\ln x,\forall x>0$.

b) $f'(x)=0\Rightarrow 1+\ln x=0\Rightarrow \ln x=-1\Rightarrow x=\frac{1}{e}$

Tabelul de variaţie al funcţiei f este

x	0					$\frac{1}{e}$					$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$		↘				$-\frac{1}{e}$		↗			

Din tabel rezultă că funcţia f este strict crescătoare pe intervalul $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

c)Din tabelul de variaţie rezultă că $f(x)\geq f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e},\forall x\in(0,+\infty)$.

2.a) Funcţia F este derivabilă pe $(0,+\infty)$.

$$F'(x)=\left(x-\frac{1}{x}+\ln x\right)'=1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=f(x),\forall x>0$$

Rezultă că funcţia F este o primitivă a funcţiei f.

b)

$$\int_1^e x\cdot f\left(x^2\right)dx=\int_1^e x\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)dx=\int_1^e\left(x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+\ln x-\frac{1}{2x^2}\right)\Bigg|_1^e=$$

$$=\left(\frac{e^2}{2}+\ln e-\frac{1}{2e^2}\right)-\left(\frac{1^2}{2}+\ln 1-\frac{1}{2\cdot 1^2}\right)=\frac{e^2}{2}+1-\frac{1}{2e^2}=\frac{1}{2}\left(e^2-\frac{1}{e^2}+2\right)$$

c) $\int_1^a\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^a\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left(x-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^a=\left(a-\frac{1}{a}\right)-\left(1-\frac{1}{1}\right)=a-\frac{1}{a}$

$$\Rightarrow a-\frac{1}{a}=\frac{3}{2}\Rightarrow 2a^2-3a-2=0$$

$$\Delta=9+16=25$$

$$a_1=2$$

$$a_2=-\frac{1}{2}$$

Deoarece in enunţ este pusă condiţia $a>1$ rezultă că soluţia exerciţiului este $a_1=2$.

Examenul de bacalaureat național 2013

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Barem de evaluare şi de notare

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$9x^2+12x=0$	**3p**
	$x=0$ sau $x=-\frac{4}{3}$	**2p**
2.	$-\frac{b}{2a}=\frac{3m}{2}$	**2p**
	$\frac{3m}{2}=\frac{3}{2}$	**2p**
	$m=1$	**1p**
3.	$3^{2x}=3^2$	**2p**
	$2x=2\Rightarrow x=1$	**3p**
4.	$C_4^2=6$	**2p**
	$A_5^2=20$	**2p**
	$5C_4^2-A_5^2=10$	**1p**
5.	C mijlocul lui $(AB)\Rightarrow x_C=\frac{x_A+x_B}{2}$ şi $y_C=\frac{y_A+y_B}{2}$	**1p**
	$x_C=-2$	**2p**
	$y_C=4$	**2p**
6.	$m(\sphericalangle BAD)=60^\circ$	**2p**
	ΔABD este echilateral	**1p**
	$BD=4$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\Delta(1)=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}$	**2p**
	$\Delta(1)=0$	**3p**
b)	$\Delta(x)=2+2\cdot x^2+2\cdot x^2+x^2+x^2-8$	**3p**
	Finalizare	**2p**
c)	$\Delta(0)=-6$	**2p**
	$(A(0))^{-1}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4 & 0\\ 4 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$f(1)=1^3-1^2+a\cdot 1+b$	**3p**

	$a+b=0$	2p
b)	$f=X^3-X^2-X+1 \Rightarrow f=(X-1)^2(X+1)$ Finalizare: $x_1=1,\ x_2=1,\ x_3=-1$	3p 2p
c)	$f(1)=0 \Rightarrow a+b=0$ $f(2)=0 \Rightarrow 2a+b=-4$ Finalizare: $a=-4,\ b=4$	1p 2p 2p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$ Finalizare	3p 2p
b)	$f'(x)=0 \Rightarrow x=\frac{1}{e}$ $f'(x)\geq 0$ pentru orice $x\in\left[\frac{1}{e},+\infty\right) \Rightarrow f$ crescătoare pe intervalul $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$	2p 3p
c)	$f'(x)\leq 0$ pentru orice $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right] \Rightarrow f$ descrescătoare pe intervalul $\left(0,\frac{1}{e}\right]$ Din tabelul de variație al funcției obținem $f(x)\geq f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$	3p 2p
2.a)	$F'(x)=\left(x-\frac{1}{x}+\ln x\right)'=1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$ F este derivabilă pe $(0,+\infty)$ și $F'=f$	3p 2p
b)	$\int_1^e x\cdot f(x^2)\,dx=\frac{1}{2}\int_1^e f(x^2)\cdot 2x\,dx=\frac{1}{2}\int_1^{e^2} f(t)\,dt=$ $=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}+\ln t\right)\Big\vert_1^{e^2}=\frac{1}{2}\left(e^2-\frac{1}{e^2}+2\right)$	3p 2p
c)	$\int_1^a\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=\left(x-\frac{1}{x}\right)\Big\vert_1^a=a-\frac{1}{a}$ $a-\frac{1}{a}=\frac{3}{2} \Rightarrow a=2$ sau $a=-\frac{1}{2}$ Finalizare: $a=2$	2p 2p 1p