Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătaţi că numărul $3\left(4+\sqrt{3}\right)-\sqrt{27}$ este natural.
5p	**2.** Calculaţi $f(1)+f(2)+...+f(10)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+3$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_7\left(x^2+8\right)=\log_7(6x)$.
5p	**4.** După o scumpire cu 30%, preţul unui obiect este 325 de lei. Determinaţi preţul obiectului înainte de scumpire.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $P(1,3)$ şi $R(3,3)$. Determinaţi coordonatele punctului Q, ştiind că R este mijlocul segmentului PQ.
5p	**6.** Arătaţi că $\sin 10°+\sin 30°-\sin 170°=\frac{1}{2}$.

Soluţii

Subiectul1

1. $3\left(4+\sqrt{3}\right)-\sqrt{27}=12+3\sqrt{3}-3\sqrt{3}=12\in N$.

2. $f(1)+f(2)+...+f(10)=2\cdot1+3+2\cdot2+3+...+2\cdot10+3=2(1+2+...+10)+30=2\cdot55+30=140$

3. $x^2+8=6x\Rightarrow x^2-6x+8=0$ care are soluţiile $x_1=2$ şi $x_2=4$.

Ambele soluţii verifică ecuaţia dată.

4.Notăm cu x preţul iniţial al obiectului.

Scumpirea este $\frac{30}{100}x$.

Se obţine ecuaţia $x+\frac{30}{100}x=325$

$x+\frac{3x}{10}=325\Rightarrow10x+3x=3250\Rightarrow x=\frac{3250}{13}\Rightarrow x=250$

Preţul iniţial al obiectului este 250 lei.

5.Fie $Q(a,b)$

R este mijlocul segmentului PQ deci $R\left(\frac{1+a}{2},\frac{3+b}{2}\right)$.

Dar ştim că $R(3,3)$ de unde deducem că $\frac{1+a}{2}=3$ şi $\frac{3+b}{2}=3$.

Obţinem $a=5$ şi $b=3$ deci $Q(5,3)$.

6.Se foloseşte formula $\sin\left(180^0-x\right)=\sin x,\forall x\in R$ de unde rezultă că $\sin170^0=\sin10^0$.

$\sin10^0+\sin30^0-\sin170^0=\sin30^0=\frac{1}{2}$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det A$.

5p **b)** Arătaţi că $B\cdot A-A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(A+xB)=0$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x\circ y=xy-3(x+y)+12$.

5p **a)** Arătaţi că $x\circ 3=3\circ x=3$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x\circ x=x$.

5p **c)** Calculaţi $1\circ 2\circ \ldots \circ 2014$.

Subiectul 2

1.a) $\det A=\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=6-2=4$

b) $B\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}$

$A\cdot B=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 2\end{pmatrix}$

$B\cdot A-A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

c) $A+xB=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}+x\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 1+x\\ 2+x & -2\end{pmatrix}$

$\det(A+xB)=\begin{vmatrix}-3 & 1+x\\ 2+x & -2\end{vmatrix}=6-(1+x)(2+x)=6-2-x-2x-x^2=4-3x-x^2$

Se obţine ecuaţia $-x^2-3x+4=0$ care are soluţiile $x_1=1$ şi $x_2=-4$

2.a) $x\circ 3=x\cdot 3-3(x+3)+12=3x-3x-9+12=3, \forall x\in R$

$3\circ x=3x-3(3+x)+12=3x-9-3x+12=3, \forall x\in R$

b) $x\circ x=x^2-6x+12$

Se obţine ecuaţia:

$x^2-6x+12=x$

$\Rightarrow x^2-7x+12=0$

care are soluţiile $x_1=3$ şi $x_2=4$

c) $\underbrace{1\circ 2}_{x}\circ 3\circ \underbrace{4\circ \ldots\circ 2014}_{y}=x\circ 3\circ y=3\circ y=3$ conform punctului a)

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x-x$.
5p	**a)** Calculaţi $f'(x),\ x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=0$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstraţi că $e^x\geq x+1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
	2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=3-\dfrac{1}{x}$.
5p	**a)** Calculaţi $\int_1^2\left(3-f(x)\right)dx$.
5p	**b)** Determinaţi primitiva $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcţiei f pentru care $F(1)=3$.
5p	**c)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[1,2]\to\mathbb{R},\ g(x)=xf(x)$.

Subiectul 3

1.a) $f'(x)=\left(e^x-x\right)'=\left(e^x\right)'-x'=e^x-1,\forall x\in R$

b)Ecuaţia tangentei la graficul unei funcţii in punctul de pe grafic de abscisă x_0 este dată de formula:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

In cazul nostru avem:

$y-f(0)=f'(0)(x-0)$

$f(0)=e^0-0=1$

$f'(0)=e^0-1=0$

$\Rightarrow y-1=0$

Ecuaţia tangentei este $y=1$.(dreaptă orizontală)

c) Tabelul de variaţie al funcţiei este:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$	- - - - - - - - - - - -		0	+ + + + + + + +	
$f(x)$		$\searrow$	$f(0)=1$	$\nearrow$	

Din tabel rezultă că funcţia este descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$ şi este crescătoare pe intervalul $[0,+\infty)$

$\Rightarrow f(x)\geq f(0),\forall x\in R$

$\Rightarrow e^x-x\geq 1,\forall x\in R$

$\Rightarrow e^x\geq x+1,\forall x\in R$

2.a) $\int_1^2\left(3-f(x)\right)dx=\int_1^2\left(3-3+\dfrac{1}{x}\right)dx=\int_1^2\dfrac{1}{x}dx=\ln x\Big|_1^2=\ln 2-\ln 1=\ln 2$

b)Mulţimea primitivelor funcţie f este:

$\int f(x)dx=\int\left(3-\dfrac{1}{x}\right)dx=3x-\ln x+C$

O primitivă oarecare a funcţie f este $F(x)=3x-\ln x+c\quad,\quad c\in R$

Din condiţia $F(1)=3$ obţinem $c=0$.

Primitiva cerută este $F:(0,\infty)\to R, F(x)=3x-\ln x$

c) $V=\pi\int_1^2 g^2(x)dx=\pi\int_1^2 (xf(x))^2 dx=\pi\int_1^2 (3x-1)^2 dx=\pi\int_1^2 (9x^2-6x+1)dx=\pi\left(9\frac{x^3}{3}-6\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_1^2=$

$=\pi(3x^3-3x^2+x)\Big|_1^2=\pi(3\cdot 2^3-3\cdot 2^2+2)-\pi(3\cdot 1^3-3\cdot 1^2+1)=14\pi-\pi=13\pi$