Ministerul Educaţiei Naţionale
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinaţi numerele reale a şi b, ştiind că $a+ib$ este conjugatul numărului complex $z=\frac{1+i}{1-i}$.
5p	**2.** Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x-12$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3\left(x^2-4\right)=\log_3(6x-12)$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulţimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie divizibil cu 100.
5p	**5.** Se consideră punctele A, B şi C astfel încât $\overrightarrow{AB}=4\vec{i}-3\vec{j}$ şi $\overrightarrow{BC}=2\vec{i}-5\vec{j}$. Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.
5p	**6.** Calculaţi lungimea laturii AC a triunghiului ABC, ştiind că $BC=8$, $A=\frac{\pi}{4}$ şi $C=\frac{7\pi}{12}$.

Soluţii

Subiectul1

1. $z=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}=\frac{2i}{2}=i$

$\bar{z}=-i=0-1i$

Rezultă $a=0$ şi $b=-1$.

2.Varful unei parabole este $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$.

$a=1$

$b=4$

$c=-12$

$-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2\cdot 1}=-2$

$\Delta=16+48=64$

$-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{64}{4\cdot 1}=-16$

$\Rightarrow V(-2,-16)$.

3.Punem condiţii de existenţă:

$$\begin{cases} x^2-4>0 \\ 6x-12>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty) \\ x\in(2,+\infty) \end{cases} \Rightarrow x\in(2,+\infty)$$

Deoarece funcţia logaritmică este injectivă obţinem că:

$x^2-4=6x-12$

$x^2-6x+8=0$

care are soluţiile $x_1 = 2 \notin (2,+\infty)$ şi $x_2 = 4$

Singura soluţie a ecuaţiei date este $x_2 = 4$.

4.Numerele naturale de trei cifre sunt 100,101,102,...,999.
In total sunt 999-99=900 numere naturale de trei cifre deci sunt 900 de cazuri posibile.
Numerele divizibile cu 100 din mulţimea numerelor naturale de trei cifre sunt 100,200,...,900 deci sunt 9 cazuri favorabile.
Probabilitatea ceruta este:

$$P = \frac{nr.cazurifavorabile}{nr.cazuriposibile} = \frac{9}{900} = \frac{1}{100}.$$

5.Se face adunarea vectorilor dupa regula triunghiului:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{i} - 5\vec{j} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$$

$$\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = 10$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$$

Lungimea vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$ este 20.

6.Calculăm unghiul B.

$$B = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{12} = \frac{12\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} - \frac{7\pi}{12} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

Pentru calcularea laturii AC se foloseşte teorema sinusurilor.

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow \frac{AC}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{8}{\sin\frac{\pi}{4}} \Rightarrow \frac{AC}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow 2AC = 8\sqrt{2} \Rightarrow AC = 4\sqrt{2}$$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătaţi că $A(x) + A(-x) = 2A(0)$, pentru orice număr real x.

5p **b)** Determinaţi numărul real x pentru care $\det(A(x)) = 0$.

5p **c)** Arătaţi că există o infinitate de matrice $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ care verifică relaţia $A(1) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + mX^2 + mX + 1$, unde m este un număr real.

5p **a)** Calculaţi $f(-1)$.

5p **b)** Determinaţi numărul real m ştiind că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile complexe ale polinomului f.

5p **c)** Determinaţi valorile reale ale lui m pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt reale.

Subiectul 2

1.a) $A(x) + A(-x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2A(0)$, $\forall x \in R$.

b) $\det A(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix} = -x^2 + 1 - 2 + 2x = -x^2 + 2x - 1$

Se obţine ecuaţia $-x^2+2x-1=0$ care are soluţia dublă $x_1=x_2=1$.

c) $A(1)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$

Căutăm matrice de forma $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in M_{3,1}(R)$ care să verifice relaţia din enunţ.

$$A(1)\cdot X=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+2z=0\\ 2x+y+z=0\\ x-z=0\end{cases}$$

Sistemul obţinut este un sistem omogen cu determinantul egal cu 0 deci are o infinitate de soluţii.
Se poate rezolva acest sistem astfel:

Se ia un minor principal , de exemplu $\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1-2=-1\neq 0$.

Necunoscute principale sunt x şi y iar necunoscută secundară este z.
Ecuaţii principale sunt primele două ecuaţii.
Se face notaţia $z=\alpha,\alpha\in R$.
Se opresc cele două ecuaţii principale:

$$\begin{cases}x+y=-2\alpha\\ 2x+y=-\alpha\end{cases}$$

Se rezolvă acest sistem şi se obţine $\begin{cases}x=\alpha\\ y=-3\alpha\end{cases}$.

Soluţia sistemului omogen de mai sus va fi $\begin{cases}x=\alpha\\ y=-3\alpha,\alpha\in R\\ z=\alpha\end{cases}$

In final , matricele X căutate, sunt de forma $X=\begin{pmatrix}\alpha\\ -3\alpha\\ \alpha\end{pmatrix},\alpha\in R$ deci sunt o infinitate de matrice.

2.a) $f(-1)=(-1)^3+m(-1)^2+m(-1)+1=-1+m-m+1=0$

b)Din relaţiile lui Viete avem:

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{m}{1}=-m\\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{c}{a}=\dfrac{m}{1}=m\\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a}=-\dfrac{1}{1}=-1\end{cases}$$

$$(x_1+x_2+x_3)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$$

$$\Rightarrow m^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2m$$

$$\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=m^2-2m$$

Se obţine ecuaţia $m^2-2m=-1$ care are o singură soluţie $m=1$.

c)Polinomul f se poate descompune in factori astfel:

$f = X^3+1+mX(X+1) = (X+1)(X^2-X+1)+mX(X+1) = (X+1)\left[X^2-X+1+mX\right] =$

$= (X+1)\left[X^2+(m-1)X+1\right]$

O rădăcină a polinomului f este $x_1 = -1$.

Polinomul f are toate rădăcinile reale dacă şi numai dacă $\Delta = (m-1)^2 - 4 \geq 0$.

Obţinem inecuaţia $m^2 - 2m - 3 \geq 0$ care are soluţia $m \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$.
5p	**a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
5p	**c)** Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.
	2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^x dx$.
5p	**a)** Calculaţi I_1.
5p	**b)** Arătaţi că $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$, pentru orice număr natural nenul n.
5p	**c)** Demonstraţi că $I_n = n!\left(e - 1 - \frac{1}{1!} - \ldots - \frac{1}{n!}\right)$, pentru orice număr natural nenul n.

Subiectul 3

1.a) Se foloseşte formula $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2+x+1}\right)' = \frac{\left(x^2+x+1\right)'}{2\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}, \forall x \in R.$$

b)Căutăm asimptotă orizontală spre $+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1} = +\infty$ deci graficul nu are asimptotă orizontală spre $+\infty$.

Căutăm asimptotă oblică spre $+\infty$ cu ecuaţie de forma $y = mx+n$.

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1.$$

$$n = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right) \overset{(\infty-\infty)}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{2}$$

Ecuaţia asimptotei oblice către $+\infty$ este $y = x+\frac{1}{2}$.

c)Se rezolvă ecuaţia $f'(x) = 0$

$$\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} = 0 \Leftrightarrow 2x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Tabelul de variaţie al funcţiei este:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		- - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + + +	
$f(x)$		$\searrow$	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	

Din tabel rezultă că funcţia este descrescătoare pe intervalul $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ şi este crescătoare pe intervalul $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right)$

2.a) $I_1=\int_0^1(1-x)e^x dx=\int_0^1(1-x)\left(e^x\right)' dx=(1-x)\left(e^x\right)\Big|_0^1-\int_0^1(1-x)'\left(e^x\right)dx=-1+\int_0^1 e^x dx=$

$=-1+e^x\Big|_0^1=-1+e-1=e-2$.

b) $I_{n+1}=\int_0^1(1-x)^{n+1}e^x dx=\int_0^1(1-x)^{n+1}\left(e^x\right)' dx=(1-x)^{n+1}\left(e^x\right)\Big|_0^1-\int_0^1\left[(1-x)^{n+1}\right]' e^x dx=-1+(n+1)\int_0^1(1-x)^n e^x dx=$

$=(n+1)I_n-1, \forall n\in N$.

c)Demonstraţia se face prin inducţie matematică.

Notăm cu $P(n): I_n=n!\left(e-1-\frac{1}{1!}-...-\frac{1}{n!}\right), n\geq 1$ propoziţia care trebuie demonstrată.

Etapa verificării:

n=1

$I_1=1!\left(e-1-\frac{1}{1!}\right)=e-2$ deci $P(1)$ este adevărată conform punctului a).

Etapa demonstraţiei:

Presupunem $P(k)$ adevărată şi demonstrăm că şi $P(k+1)$ este adevărată.

$I_{k+1}=(k+1)I_k-1=(k+1)k!\left(e-1-\frac{1}{1!}-...-\frac{1}{k!}\right)-1=(k+1)!\left(e-1-\frac{1}{1!}-...-\frac{1}{k!}\right)-1=$

$=(k+1)!\left(e-1-\frac{1}{1!}-...-\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right)$ deci propoziţia $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural nenul n.