Ministerul Educaţiei Naţionale
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinaţi raţia progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$ cu termeni reali, ştiind că $b_2=1$ şi $b_5=8$.
5p	**2.** Calculaţi $(f\circ f)(0)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+7$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\log_5(x-3)=\log_5(x-1)$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr din mulţimea $A=\{1,2,3,\ldots,50\}$, acesta să fie număr divizibil cu 11.
5p	**5.** Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{v}=2\vec{i}+(a+1)\vec{j}$ şi $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.
5p	**6.** Rezolvaţi în mulţimea $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ ecuaţia $2\sin x-1=0$.

Soluţii

Subiectul1

1.Formula termenului general al unei progresii geometrice este $b_n=b_1q^{n-1}$.

$$\left.\begin{array}{l} b_2=b_1q \\ b_5=b_1q^4 \end{array}\right\} \Rightarrow b_5=b_2q^3 \Rightarrow q^3=8 \Rightarrow q=2.$$

2. $f(0)=7$

$$f(f(0))=f(7)=7^2+2\cdot 7+7=70.$$

3.Punem condiţii de existenţă:

$$\begin{cases} x-3>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Rightarrow x\in(3,+\infty)$$

Ecuaţia dată devine:

$$\log_5(x-3)^2=\log_5(x-1)$$

$$\Rightarrow (x-3)^2=x-1$$

$$\Rightarrow x^2-6x+9=x-1$$

$$\Rightarrow x^2-7x+10=0$$

care are soluţiile $x_1=2$ şi $x_2=5$.

Prima soluţie nu verifică condiţia de existenţă.

Singura soluţie bună este $x=5$.

4.Probabilitatea unui eveniment se calculează cu formula $P=\dfrac{nr.cazurifavorabile}{nr.cazuriposibile}$

Mulţimea A are 50 de elemente deci sunt 50 de cazuri posibile.

In mulţimea A sunt 4 numere divizibile cu 11 şi anume 11,22,33,44 deci sunt 4 cazuri favorabile.

$$P=\frac{4}{50}=\frac{2}{25}.$$

5. Vectorii daţi sunt coliniari dacă şi numai dacă $\frac{2}{1}=\frac{a+1}{2}$

$\Rightarrow a=3$.

6. $2\sin x=1\Rightarrow \sin x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Arătaţi că $A\cdot B=B\cdot A$.
5p	**b)** Verificaţi dacă $\det(A+B)>\det A+\det B$.
5p	**c)** Determinaţi numărul matricelor $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$ pentru care $X^2=A$, unde a şi b sunt numere reale.
	2. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f=X^3+X+a$, unde a este număr real.
5p	**a)** Pentru $a=-2$, arătaţi că $f(1)=0$.
5p	**b)** Determinaţi numărul real a, ştiind că $(2-x_1)(2-x_2)(2-x_3)=2$.
5p	**c)** Pentru $a\neq 0$, determinaţi un polinom de grad trei, având coeficienţii reali, care are rădăcinile $\frac{1}{x_1}$, $\frac{1}{x_2}$ şi $\frac{1}{x_3}$.

Subiectul 2

1.a) $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 20\end{pmatrix}$

$B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 20\end{pmatrix}$

$\Rightarrow A\cdot B=B\cdot A$

b) $A+B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}$

$\det(A+B)=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & 9\end{vmatrix}=18$

$\det A=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix}=4$

$\det B=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{vmatrix}=5$

$\det A+\det B=9$

$\Rightarrow \det(A+B)>\det A+\det B$

c) $X^2=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2 & 0\\ 0 & b^2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}a^2 & 0\\ 0 & b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a^2=1\\ b^2=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\pm 1\\ b=\pm 2\end{cases}$

Matricele X cu proprietatea $X^2 = A$ sunt $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ deci sunt in total 4 matrice.

2.a) $f(1) = 1^3 + 1 - 2 = 0$

b)Polinomul f se poate descompune in factori astfel $f = (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$.

Rezultă $f(2) = (2 - x_1)(2 - x_2)(2 - x_3)$

$f(2) = 2^3 + 2 + a = 10 + a$

$10 + a = 2$

$\Rightarrow a = -8$

c)Metoda 1

Relaţiile lui Viete pentru polinomul f sunt:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 1 \\ x_1x_2x_3 = -a \end{cases}$$

Relaţiile lui Viete pentru polinomul căutat sunt:

$$\begin{cases} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1x_2x_3} = -\frac{1}{a} \\ \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{x_3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1x_2x_3} = 0 \\ \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{x_3} = -\frac{1}{a} \end{cases}$$

Un polinom căutat poate fi $g_1 = X^3 + \frac{1}{a}X^2 + \frac{1}{a}$ sau după inmulţire cu a putem lua $g = aX^3 + X^2 + 1$.

Metoda 2

Polinomul căutat se poate obţine din polinomul f făcand notaţia $\frac{1}{X} = Y \Leftrightarrow X = \frac{1}{Y}$.

$X^3 + X + a = \frac{1}{Y^3} + \frac{1}{Y} + a = \frac{1 + Y^2 + aY^3}{Y^3}$ de unde se deduce că se poate lua $g = aX^3 + X^2 + 1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x+1) - \ln x$.

5p	**a)** Calculaţi $f'(x)$, $x \in (0, +\infty)$.
5p	**b)** Arătaţi că funcţia f este descrescătoare.
5p	**c)** Calculaţi $\lim\limits_{x \to +\infty} xf(x)$.

2. Se consideră funcţia $f : (-2, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x+2}$.

5p	**a)** Calculaţi $\int_0^1 (x+2) f(x) dx$.
5p	**b)** Arătaţi că $\int_{2013}^{2014} \left(f(x) + (x+2) f'(x) \right) dx = 1$.
5p	**c)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x}{f(x)}$.

Subiectul 3

1.a) $f'(x)=\left[\ln(x+1)-\ln x\right]'=\left[\ln(x+1)\right]'-(\ln x)'=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x},\forall x>0$.

b) $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}=\frac{x-x-1}{x(x+1)}=-\frac{1}{x(x+1)}<0,\forall x\in(0,+\infty)$ deci funcţia f este descrescătoare pe $(0,+\infty)$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left[\ln(x+1)-\ln x\right]\overset{(\infty\cdot 0)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)-\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\left[\ln(x+1)-\ln x\right]'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x(x+1)}}{-\frac{1}{x^2}}=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x'}{(x+1)'}=1$.

Obs:Pentru calculul de mai sus s-au folosit regulile lui L'Hospital

2.a) $\int_0^1(x+2)f(x)dx=\int_0^1(x+2)\frac{x}{x+2}dx=\int_0^1 xdx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2}$.

b)Să observăm egalitatea $\left[(x+2)f(x)\right]'=(x+2)'f(x)+(x+2)f'(x)=f(x)+(x+2)f'(x),\forall x>-2$

Mai departe avem :

$\int_{2013}^{2014}\left(f(x)+(x+2)f'(x)\right)dx=\int_{2013}^{2014}\left[(x+2)f(x)\right]'dx=\left.\left[(x+2)f(x)\right]\right|_{2013}^{2014}=\left.x\right|_{2013}^{2014}=2014-2013=1$

c)$V=\pi\int_1^2 g^2(x)dx=\pi\int_1^2\left(\frac{x}{f(x)}\right)^2dx=\pi\int_1^2(x+2)^2dx=\pi\int_1^2\left(x^2+4x+4\right)dx=\pi\left.\left(\frac{x^3}{3}+4\frac{x^2}{2}+4x\right)\right|_1^2=$

$=\pi\left(\frac{2^3}{3}+2\cdot 2^2+8\right)-\pi\left(\frac{1^3}{3}+2\cdot 1^2+4\right)=\pi\left(\frac{8}{3}+16-\frac{1}{3}-6\right)=\pi\left(\frac{7}{3}+10\right)=\frac{37\pi}{3}$.