Ministerul Educaţiei Naţionale
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculaţi media aritmetică a numerelor $a=2\left(5-\sqrt{5}\right)$ şi $b=2\sqrt{5}$.

5p **2.** Determinaţi abscisele punctelor de intersecţie a graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4x+3$ cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5(2x-1)-\log_5 3=0$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de o cifră, acesta să fie multiplu de 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$ şi $B(6,4)$. Determinaţi coordonatele mijlocului segmentului AB.

5p **6.** Arătaţi că $\sin(a+b)=\frac{63}{65}$, ştiind că $a,b\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin a=\frac{3}{5}$ şi $\sin b=\frac{12}{13}$.

Soluţii

Subiectul1

1. $m_a=\frac{a+b}{2}=\frac{10-2\sqrt{5}+2\sqrt{5}}{2}=\frac{10}{2}=5$

2. $f(x)=0$

$x^2-4x+3=0$

$\Delta=(-4)^2-4\cdot1\cdot3=16-12=4$

Se obţin soluţiile $x_1=1$ şi $x_2=3$

3.Condiţii de existenţă $2x-1>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$

Pentru rezolvare avem:

$\log_5(2x-1)=\log_5 3$

$2x-1=3$

$x=2$

4.Probabilitatea unui eveniment se calculează cu formula $P=\frac{nrcazurifavorabile}{nrcazuriposibile}$

Numerele naturale de o cifră sunt 0,1,2,..,9 deci sunt 10 cazuri posibile.
Numerele de o cifră multipli ai lui 3 sunt 0,3,6,9 deci sunt 4 cazuri favorabile

$P=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

5. $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)\Rightarrow M\left(\frac{2+6}{2},\frac{4+4}{2}\right)\Rightarrow M(4,4)$

6. $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

$\sin^2 a+\cos^2 a=1$

$\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cos^2 a=1$

$\cos^2 a=1-\frac{9}{25}$

$\cos^2 a=\frac{16}{25}\Rightarrow \cos a=\frac{4}{5}$

deoarece $a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

$\sin^2 b+\cos^2 b=1$

$\left(\frac{12}{13}\right)^2+\cos^2 b=1$

$\cos^2 b=1-\frac{144}{169}$

$\cos^2 b=\frac{25}{169}\Rightarrow \cos b=\frac{5}{13}$

In final avem:

$\sin(a+b)=\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{13}+\frac{12}{13}\cdot\frac{4}{5}=\frac{15}{65}+\frac{48}{65}=\frac{63}{65}$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det A$.

5p **b)** Determinaţi numerele reale p pentru care $A\cdot A=pA$.

5p **c)** Determinaţi matricele $B=\begin{pmatrix}0 & b\\ b & 0\end{pmatrix}$, ştiind că $\det(A+B)=0$, unde b este un număr real.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie dată de $x\circ y=-xy+x+y$.

5p **a)** Calculaţi $1\circ 2015$.

5p **b)** Arătaţi că $x\circ y=-(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x\circ 5^x=1$.

Subiectul 2

1.a) $\det A=\begin{vmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2+2=0$

b)

$A\cdot A=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=A$

$A=pA\Rightarrow p=1$

c)

$A+B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & b\\ b & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -2+b\\ 1+b & -1\end{pmatrix}$

$\det(A+B)=\begin{vmatrix}2 & -2+b\\ 1+b & -1\end{vmatrix}=-2-(1+b)(-2+b)$

Se obţine ecuaţia $-2-(1+b)(-2+b)=0$

$-2+2-b+2b-b^2=0$

$b-b^2=0$

$b(1-b)=0$

Rezultă $b=0$ şi $b=1$.

Se obţin matricele $B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

2.a) $1\circ 2015=-1\cdot 2015+1+2015=1$

b) $x\circ y=-xy+x+y=-xy+x+y-1+1=-x(y-1)+(y-1)+1=-(x-1)(y-1)+1, \forall x,y\in R$

c)Cf. punctului b) avem $3^x\circ 5^x=-(3^x-1)(5^x-1)+1$

Se obţine ecuaţia $-(3^x-1)(5^x-1)+1=1$

$(3^x-1)(5^x-1)=0$

Rezultă $3^x-1=0\Rightarrow x=0$

sau $5^x-1=0\Rightarrow x=0$

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$.

5p **a)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

5p **b)** Arătaţi că $f'(x)=-\dfrac{3(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^5+x$.

5p **a)** Calculaţi $\int_{-1}^{1} x^5dx$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_{0}^{1}\left(f(x)-x^5\right)e^x dx=1$.

5p **c)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, definită prin $g(x)=\dfrac{f(x)-x}{x^3}$.

Subiectul 3

1.a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x}{x^2+1}=\dfrac{3\cdot 1}{1^2+1}=\dfrac{3}{2}$

b) $f'(x)=\left(\dfrac{3x}{x^2+1}\right)'=\dfrac{(3x)'\cdot(x^2+1)-(3x)\cdot(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\dfrac{3(x^2+1)-3x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{3x^2+3-6x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{3-3x^2}{(x^2+1)^2}=$

$=-\dfrac{3(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}, \forall x\in R$

c)Se rezolvă ecuaţia $f'(x)=0$

$$-\frac{3(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}=0 \Rightarrow (x-1)(x+1)=0$$

Se obţin soluţiile $x_1=-1$ şi $x_2=1$.

Tabelul cu monotonia funcţiei f este

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		- - - - - - -	0	+ + + +	0	- - - - - - - -	
$f(x)$		↘		↗		↘	

Din tabel rezultă că funcţia este descrescătoare pe intervalele $(-\infty,-1]$ şi $[1,+\infty)$ şi este crescătoare pe intervalul $[-1,1]$.

2.a) $\int_{-1}^{1} x^5 dx = \left.\frac{x^6}{6}\right|_{-1}^{1} = \frac{1^6}{6}-\frac{(-1)^6}{6}=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=0$

b) $\int_0^1 \left(f(x)-x^5\right)e^x dx = \int_0^1 \left(x^5+x-x^5\right)e^x dx = \int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 x\left(e^x\right)' dx = \left.xe^x\right|_0^1 - \int_0^1 x'e^x dx = e-\int_0^1 e^x dx =$

$= e-\left.e^x\right|_0^1 = e-(e-1)=1$

Obs:S-a folosit mai sus metoda integrării prin părţi.

c) $g(x)=\frac{f(x)-x}{x^3}=\frac{x^5+x-x}{x^3}=\frac{x^5}{x^3}=x^2, \forall x\in[1,2]$

Volumul corpului de rotaţie se calculează cu formula

$$V=\pi\int_1^2 g^2(x)dx=\pi\int_1^2 x^4 dx=\pi\left.\frac{x^5}{5}\right|_1^2=\pi\left(\frac{2^5}{5}-\frac{1^5}{5}\right)=\pi\left(\frac{32}{5}-\frac{1}{5}\right)=\frac{31\pi}{5}$$