Ministerul Educaţiei Naţionale
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră numărul complex $z=1+i$. Calculaţi $(z-1)^2$.
5p	**2.** Arătaţi că $3(x_1+x_2)-4x_1x_2=3$, ştiind că x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2-5x+3=0$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x-3\cdot 2^x+2=0$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 13.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie $y=3x+4$ şi punctul $A(1,0)$. Determinaţi ecuaţia paralelei duse prin punctul A la dreapta d.
5p	**6.** Calculaţi raza cercului circumscris triunghiului ABC, ştiind că $AB=12$ şi $C=\frac{\pi}{6}$.

Soluţii

Subiectul1

1. $(z-1)^2=(1+i-1)^2=i^2=-1$

2.Se folosesc relaţiile lui Viete:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-5}{1}=5 \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{3}{1}=3 \end{cases}$$

$3(x_1+x_2)-4x_1x_2=3\cdot 5-4\cdot 3=3$

3. $4^x=(2^2)^x=(2^x)^2$

Ecuaţia dată devine:

$(2^x)^2-3\cdot 2^x+2=0$

Se face notaţia $2^x=y$

$y^2-3y+2=0$ care are soluţiile $y_1=1$ şi $y_2=2$.

Revenim la notaţia făcută :

$2^x=1\Rightarrow x=0$

$2^x=2\Rightarrow x=1$

4.Probabilitatea unui eveniment se calculează cu formula $P=\frac{nrcazurifavorabile}{nrcazuriposibile}$.

Numerele naturale de două cifre sunt 10,11,12,...,99.
In total sunt 99-9=90 de cazuri posibile.
Numerele naturale de două cifre divizibile cu 13 sunt 13,26,39,52,65,78,91 deci sunt 7 cazuri favorabile.

$P=\frac{7}{90}$

5.Panta dreptei d este $m_d = 3$

Două drepte sunt paralele dacă şi numai dacă au aceeaşi pantă.

Ecuaţia dreptei care trece printr-un punct dat şi are panta m este dată de formula

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

In cazul nostru avem:

$y - 0 = 3(x - 1)$

$y = 3x - 3$

6.Se foloseşte teorema sinusurilor:

Intr-un triunghi oarecare avem $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

$$\frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \frac{12}{\sin\frac{\pi}{6}} = 2R \Rightarrow \frac{12}{\frac{1}{2}} = 2R \Rightarrow 2R = 24 \Rightarrow R = 12$$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & a+1 \\ 2 & a+2 & a+3 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Calculaţi $\det(A(a))$.

5p **b)** Determinaţi numărul natural n, ştiind că $2A(n^2) - A(n) = A(6)$.

5p **c)** Arătaţi că există o infinitate de matrice $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ care verifică relaţia $A(2015) \cdot X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + mX - 3$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m = 2$, arătaţi că $f(1) = 0$.

5p **b)** Determinaţi numărul real m, ştiind că polinomul f este divizibil cu $X + 1$.

5p **c)** Arătaţi că, pentru orice număr real strict pozitiv m, polinomul f are două rădăcini de module egale.

Subiectul 2

1.a) $\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & a+1 \\ 2 & a+2 & a+3 \end{vmatrix} \overset{\substack{C2-C1 \\ C3-C1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & a+1 \\ 2 & a & a+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a+1 \\ a & a+1 \end{vmatrix} = 0$

Pentru calculul determinantului de ordinul 3 am scăzut prima coloană din celelalte două apoi am dezvoltat după prima linie.

Determinantul de ordin doi este egal cu 0 deoarece are două linii egale.

b) $2A(n^2) - A(n) = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & n^2 & n^2+1 \\ 2 & n^2+2 & n^2+3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & n & n+1 \\ 2 & n+2 & n+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2n^2 & 2n^2+2 \\ 4 & 2n^2+4 & 2n^2+6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & n & n+1 \\ 2 & n+2 & n+3 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2n^2-n & 2n^2-n+1 \\ 2 & 2n^2-n+2 & 2n^2-n+3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2n^2-n & 2n^2-n+1 \\ 2 & 2n^2-n+2 & 2n^2-n+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & 7 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Se obţine ecuaţia $2n^2-n-6=0$ care are o singură soluţie număr natural $n=2$.

c)Fie $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\in M_{3,1}(R)$

$$A(2015)\cdot X=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2015 & 2016 \\ 2 & 2017 & 2018 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2015y+2016z=0 \\ 2x+2017y+2018z=0 \end{cases}$$

Determinantul sistemului omogen este egal cu 0 (vezi punctul a) deci sistemul are o infinitate de soluţii.
Rezultă ca există o infinitate de matrice X care verifică ecuaţia din enunţ.

2.a) $f(1)=1^3+2\cdot 1-3=1+2-3=0$

b)Conform teoremei lui Bezout polinomul f este divizibil cu $X+1$ dacă şi numai dacă $f(-1)=0$.

$f(-1)=(-1)^3+m(-1)-3=-1-m-3$

Se obţine ecuaţia $-1-m-3=0$ care are soluţia $m=-4$.

c)

$V_1=x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}=-\frac{0}{1}=0$

$V_2=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a}=\frac{m}{1}=m$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=V_1^2-2V_2=-2m<0$ deci polinomul dat are cel puţin o rădăcină din mulţimea $C\setminus R$ fie aceea $x_1=a+bi, b\neq 0$.

Cum $f\in R[X]$ obţinem că $x_2=a-bi$ este de asemenea rădăcină pentru polinomul f.

$|x_1|=|x_2|=\sqrt{a^2+b^2}$

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{e^x-x}$.

5p **a)** Calculaţi $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=0$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$.

5p **a)** Calculaţi $\int_0^2 f^2(x)dx$.

5p **b)** Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este funcţie crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)dx$. Arătaţi că $nI_n=\sqrt{5}-4(n-1)I_{n-2}$ pentru orice număr natural n, $n\geq 3$.

Subiectul 3

1.a) $f'(x)=\left(\frac{x+1}{e^x-x}\right)'=\frac{(x+1)'(e^x-x)-(x+1)(e^x-x)'}{(e^x-x)^2}=\frac{e^x-x-(x+1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2}=\frac{e^x-x-xe^x+x-e^x+1}{(e^x-x)^2}=$

$=\frac{1-xe^x}{(e^x-x)^2}, x\in R$

b)Ecuaţia tangentei la graficul unei funcţii in punctul de pe grafic de abscisă x_0 este dată de formula:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

In cazul nostru avem:

$y-f(0)=f'(0)(x-0)$

$f(0)=\frac{0+1}{e^0-0}=1$

$f'(0)=\frac{1-0e^0}{(e^0-0)^2}=1$

Ecuaţia tangentei este

$y-1=x$

$y=x+1$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{e^{-x}+x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(-x+1)'}{(e^{-x}+x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-1}{-e^{-x}+1}=\frac{-1}{0+1}=-1$

2.a) $\int_0^2 f^2(x)dx=\int_0^2\frac{1}{x^2+4}dx=\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}\Big|_0^2=\frac{1}{2}arctg\frac{2}{2}-\frac{1}{2}arctg\frac{0}{2}=\frac{1}{2}arctg1=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$

b)Fie F o primitivă oarecare a funcţiei f.

$F'(x)=f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}>0, \forall x\in R$ deci F este strict crescătoare pe **R**.

c) $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{\sqrt{x^2+4}}dx=\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\cdot x^{n-1}dx=\int_0^1\left(\sqrt{x^2+4}\right)'\cdot x^{n-1}dx=\sqrt{x^2+4}\cdot x^{n-1}\Big|_0^1-\int_0^1\sqrt{x^2+4}\cdot\left(x^{n-1}\right)'dx=$

$=\sqrt{5}-(n-1)\int_0^1\sqrt{x^2+4}\cdot x^{n-2}dx=\sqrt{5}-(n-1)\int_0^1\frac{(x^2+4)x^{n-2}}{\sqrt{x^2+4}}dx=\sqrt{5}-(n-1)\int_0^1\frac{x^n+4x^{n-2}}{\sqrt{x^2+4}}dx=$

$=\sqrt{5}-(n-1)\int_0^1\left(\frac{x^n}{\sqrt{x^2+4}}+\frac{4x^{n-2}}{\sqrt{x^2+4}}\right)dx=\sqrt{5}-(n-1)(I_n+4I_{n-2})$

$I_n=\sqrt{5}-(n-1)(I_n+4I_{n-2})$

$I_n=\sqrt{5}-(n-1)I_n-4(n-1)I_{n-2}$

$nI_n=\sqrt{5}-4(n-1)I_{n-2}, \forall n\in N, n\geq 3$