Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

Model

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}=0,111$.
5p	**2.** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $f(x)\geq g(x)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+1$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x^2}=2^{4x-3}$.
5p	**4.** O firmă folosește 5000 de lei pentru publicitate, sumă care reprezintă 5% din profitul anual al firmei. Calculați profitul anual al firmei.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,0)$, $B(8,3)$ și $C(0,3)$. Calculați aria triunghiului ABC.
5p	**6.** Arătați că $2\sin^2 30°+2\cos^2 60°=1$.

Soluții

Subiectul1

1. $\frac{1}{10}=0,1$

$\frac{1}{100}=0,01$

$\frac{1}{1000}=0,001$

$0,1+0,01+0,001=0,111$

2. $f(x)\geq g(x)\Leftrightarrow 2x-1\geq x+1\Leftrightarrow x\geq 2\Leftrightarrow x\in[2,+\infty)$

3. $x^2=4x-3$

$x^2-4x+3=0$

$\Delta=16-12=4$

Se obţin soluţiile $x_1=1$ şi $x_2=3$

4.Notăm cu x profitul anual al firmei.

$\frac{5}{100}\cdot x=5000$

$\frac{x}{20}=5000$

$x=100000lei$

5. $Aria=\frac{1}{2}|\Delta|$

$$\Delta=\begin{vmatrix}4 & 0 & 1\\ 8 & 3 & 1\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix}=12+24+0-0-12-0=24$$

$$Aria=\frac{1}{2}\cdot|24|=12$$

6. $\sin 30^0=\frac{1}{2}$

$\cos 60^0=\frac{1}{2}$

$$2\sin^2 30^0+2\cos^2 60^0=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=1$$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=xy+3x+3y+6$.
5p	**1.** Arătați că $0\circ(-3)=-3$.
5p	**2.** Arătați că $x\circ y=(x+3)(y+3)-3$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**3.** Arătați că $(-3)\circ x=-3$, pentru orice număr real x.
5p	**4.** Verificați dacă $e=-2$ este element neutru al legii de compoziție „$\circ$”.
5p	**5.** Calculați $(-2016)\circ(-2015)\circ\ldots\circ(-3)$.
5p	**6.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x\circ x=5$.

Subiectul 2

1. $0\circ(-3)=0\cdot(-3)+3\cdot 0+3\cdot(-3)+6=0+0-9+6=-3$

2. $x\circ y=xy+3x+3y+9-3=x(y+3)+3(y+3)-3=(x+3)(y+3)-3,\forall x,y\in R$

3. $(-3)\circ x=(-3)\cdot x+3(-3)+3x+6=-3x-9+3x+6=-3,\forall x\in R$

4. $x\circ(-2)=x\cdot(-2)+3x+3(-2)+6=-2x+3x-6+6=x,\forall x\in R$

$(-2)\circ x=(-2)\cdot x+3\cdot(-2)+3x+6=-2x-6+3x+6=x,\forall x\in R$

$x\circ(-2)=(-2)\circ x=x,\forall x\in R$ deci $e=-2$ este element neutru al legii de compoziţie date.

5. $x\circ(-3)=x\cdot(-3)+3x+3\cdot(-3)+6=-3x+3x-9+6=-3,\forall x\in R$

$$(-2016)\circ(-2015)\circ\ldots\circ(-4)\circ(-3)=\underbrace{\left((-2016)\circ(-2015)\circ\ldots\circ(-4)\right)}_{x}\circ(-3)=x\circ(-3)=-3$$

6. $x\circ x=(x+3)(x+3)-3=(x+3)^2-3$

$$(x\circ x)\circ x=\left[(x+3)^2-3\right]\circ x=\left[(x+3)^2-3+3\right]\cdot(x+3)-3=(x+3)^3-3$$

Se obţine ecuaţia $(x+3)^3-3=5$

$(x+3)^3=8$

$x+3=2$

$x=-1$

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **1.** Arătați că $\det A=1$.

5p **2.** Arătați că $A^2-6A=-I_2$, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **3.** Determinați numerele reale x pentru care $\det(xA)=4$.

5p **4.** Arătați că $\det\left(A^2-6A+aI_2\right)\geq 0$, pentru orice număr real a, unde $A^2=A\cdot A$.

5p **5.** Determinați inversa matricei B, unde $B=A+I_2$.

5p **6.** Determinați matricele $X=\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, știind că $\det X=8$.

Subiectul 3

1. $\det A=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=5\cdot 1-2\cdot 2=5-4=1$

2. $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}29 & 12\\ 12 & 5\end{pmatrix}$

$6A=6\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}30 & 12\\ 12 & 6\end{pmatrix}$

$A^2-6A=\begin{pmatrix}29 & 12\\ 12 & 5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}30 & 12\\ 12 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=-I_2$

3. $xA=x\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5x & 2x\\ 2x & x\end{pmatrix}$

$\det(xA)=\begin{vmatrix}5x & 2x\\ 2x & x\end{vmatrix}=5x^2-4x^2=x^2$

$x^2=4\Rightarrow x=\pm 2$

4. $A^2-6A+aI_2=-I_2+aI_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-1 & 0\\ 0 & a-1\end{pmatrix}$

$\det\left(A^2-6A+aI_2\right)=\begin{vmatrix}a-1 & 0\\ 0 & a-1\end{vmatrix}=(a-1)^2\geq 0, \forall a\in R$

5. $B=A+I_2=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$

$\det B=\begin{vmatrix}6 & 2\\ 2 & 2\end{vmatrix}=12-4=8\neq 0$

Matricea transpusă este ${}^tB=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$

Matricea adjunctă este $B^*=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 6\end{pmatrix}$

Se calculează matricea inversă cu formula $B^{-1}=\dfrac{1}{\det B}\cdot B^*$

$$B^{-1}=\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}$$

6. $\det X=\begin{vmatrix}a & b\\ b & a\end{vmatrix}=a^2-b^2$

$a^2-b^2=8\Leftrightarrow(a-b)(a+b)=8$ unde a,b sunt numere intregi.

Numerele intregi $a-b$ şi $a+b$ au aceeaşi paritate (!) şi cum produsul lor este 8 rezultă că $a-b$ şi $a+b$ sunt amandoua pare.

Avem următoarele cazuri:

$$\begin{cases}a-b=2\\ a+b=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ b=1\end{cases}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}a-b=4\\ a+b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ b=-1\end{cases}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}a-b=-2\\ a+b=-4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\ b=-1\end{cases}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-3 & -1\\ -1 & -3\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}a-b=-4\\ a+b=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\ b=1\end{cases}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$$