Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

Examenul de bacalaureat naţional 2016

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați primul termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_5 = 48$ și $b_8 = 384$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-7x+6$. Determinați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $32^x = 16\cdot 2^x$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr natural n din mulţimea $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, acesta să verifice egalitatea $n^2-5n+6=0$.
5p	**5.** Determinați numărul real a, știind că vectorii $\vec{u}=(a+1)\vec{i}+(a-1)\vec{j}$ și $\vec{v}=6\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.
5p	**6.** Arătaţi că $(2\sin x+\cos x)^2+(\sin x+2\cos x)^2-4\sin 2x=5$, pentru orice număr real x.

Soluţii

Subiectul1

1. $b_5 = b_1\cdot q^4 = 48$

$b_8 = b_1\cdot q^7 = 384$

$\Rightarrow \dfrac{b_1\cdot q^7}{b_1\cdot q^4} = \dfrac{384}{48} = 8$

$q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$

$b_1\cdot 2^4 = 48$

$b_1 = \dfrac{48}{16} = 3$

2.Abscisele punctelor de intersecţie dintre un grafic şi axa Ox se obţin rezolvand ecuaţia $f(x)=0$.

$x^2-7x+6=0$

$\Delta = 49-24 = 25$

Se obţin soluţiile $x_1 = 1$ şi $x_2 = 6$.

Parabola intersecteaza axa Ox in două puncte A(1,0) şi B(6,0).

Distanţa dintre cele doua puncte este de 6-1=5 unităţi.

3. $\left(2^5\right)^x = 2^4\cdot 2^x$

$2^{5x} = 2^{4+x}$

$5x = 4+x$

$4x = 4$

$x = 1$

4.Probabilitatea unui eveniment se calculează cu formula $P = \dfrac{numarcazurifavorabile}{numarcazuriposibile}$

Mulţimea dată are 5 elemente deci sunt 5 cazuri posibile.

Rezolvand ecuaţia $n^2-5n+6=0$ se obţin soluţiile $n_1=2$ şi $n_2=3$ deci in mulţimea dată sunt două elemente care verifică egalitatea.
Rezultă că sunt două cazuri favorabile.

$P=\frac{2}{5}$

5.Punem condiţia de coliniaritate $\frac{a+1}{6}=\frac{a-1}{2}$

$6(a-1)=2(a+1)$

$6a-6=2a+2$

$4a=8$

$a=2$

6. $(2\sin x+\cos x)^2+(\sin x+2\cos x)^2-4\sin 2x=4\sin^2 x+4\sin x\cos x+\cos^2 x+$

$+\sin^2 x+4\sin x\cos x+4\cos^2 x-4\sin 2x=5(\sin^2 x+\cos^2 x)+8\sin x\cos x-4\sin 2x=$

$=5(\sin^2 x+\cos^2 x)+4\sin 2x-4\sin 2x=5\cdot 1=5$

In rezolvarea de mai sus am folosit formulele:

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$\sin 2x=2\sin x\cos x$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&2\\4&1\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}0&x\\y&0\end{pmatrix}$, unde x şi y sunt numere reale.
5p	**a)** Arătaţi că $\det(2A)=-28$.
5p	**b)** Determinaţi numerele reale x şi y, ştiind că $A+2B=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.
5p	**c)** Dacă $AB=BA$, arătaţi că $\det B\le 0$.
	2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=3xy+3x+3y+2$.
5p	**a)** Arătaţi că $(-1)\circ 1=-1$.
5p	**b)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x\circ x=x$.
5p	**c)** Determinaţi perechile (a,b) de numerele întregi, ştiind că $a\circ b=8$.

Subiectul 2

1.a) $2A=2\begin{pmatrix}1&2\\4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\8&2\end{pmatrix}$

$\det(2A)=\begin{vmatrix}2&4\\8&2\end{vmatrix}=2\cdot 2-4\cdot 8=4-32=-28$

b) $A+2B=\begin{pmatrix}1&2\\4&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&x\\y&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\4&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2x\\2y&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2+2x\\4+2y&1\end{pmatrix}$

Se obţine egalitatea matriceală $\begin{pmatrix}1&2+2x\\4+2y&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$2+2x=0\Rightarrow x=-1$

$4+2y=0\Rightarrow y=-2$

c) $AB=\begin{pmatrix}1&2\\4&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&x\\y&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2y&x\\y&4x\end{pmatrix}$

$$BA=\begin{pmatrix}0 & x\\ y & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x & x\\ y & 2y\end{pmatrix}$$

$$AB=BA\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2y & x\\ y & 4x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x & x\\ y & 2y\end{pmatrix}\Leftrightarrow 2y=4x\Leftrightarrow y=2x$$

$$\det B=\begin{vmatrix}0 & x\\ y & 0\end{vmatrix}=0-xy=-x\cdot 2x=-2x^2\le 0$$

2.a) $(-1)\circ 1=3(-1)\cdot 1+3(-1)+3\cdot 1+2=-3-3+3+2=-1$

b) $x\circ x=3x\cdot x+3x+3x+2=3x^2+6x+2$

Se obţine ecuaţia $3x^2+6x+2=x$

$3x^2+5x+2=0$

$\Delta=25-24=1$

Se obţin soluţiile $x_1=-1$ şi $x_2=-\frac{2}{3}$

c) $a\circ b=3ab+3a+3b+2=8$

$3ab+3a+3b+3=9$

$ab+a+b+1=3$

$(a+1)(b+1)=3$

Avem următoarele posibilităţi:

$$\begin{cases}a+1=3\\ b+1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\ b=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}a+1=1\\ b+1=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ b=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}a+1=-3\\ b+1=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-4\\ b=-2\end{cases}$$

$$\begin{cases}a+1=-1\\ b+1=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=-4\end{cases}$$

Perechile cerute sunt $(2,0),(0,2),(-4,-2),(-2,-4)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-2)e^x$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=(x-1)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstraţi că $f'(x)\ge -1$, pentru orice număr real x.
	2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x^2+1}{x}$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=3$.
5p	**b)** Demonstraţi că funcţia $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2+\ln x+2016$ este o primitivă a funcţiei f.
5p	**c)** Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ este mai mic decât 14π.

Subiectul 3

1.a) $f'(x)=\left[(x-2)e^x\right]'=(x-2)'e^x+(x-2)\left(e^x\right)'=e^x+(x-2)e^x=(1+x-2)e^x=(x-1)e^x, x\in R$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)e^x \overset{(\infty\cdot 0)}{=} \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x-2}{e^{-x}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x-2)'}{\left(e^{-x}\right)'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=\frac{1}{-\infty}=0$

Ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f este $y=0$ (axa Ox).

c) $f''(x)=\left[(x-1)e^x\right]'=(x-1)'e^x+(x-1)\left(e^x\right)'=e^x+(x-1)e^x=(1+x-1)e^x=xe^x, x\in R$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow xe^x=0 \Leftrightarrow x=0$

Tabelul de variaţie al funcţiei f' este

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		- - - - - - - -	0	+ + + + + + + +	
$f'(x)$		↘	-1	↗	

Din tabelul de variaţie rezultă că $f'(x)\geq -1, x\in R$

2.a) $\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^2\left(\frac{2x^2+1}{x}-\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^2 2xdx=2\frac{x^2}{2}\Big|_1^2=x^2\Big|_1^2=2^2-1^2=3$

b) $F'(x)=\left(x^2+\ln x+2016\right)'=\left(x^2\right)'+(\ln x)'+(2016)'=2x+\frac{1}{x}=\frac{2x^2+1}{x}, x\in(0,+\infty)$

deci F este o primitivă a funcţiei f.

c) $V=\pi\int_1^2 g^2(x)dx=\pi\int_1^2 f^2(x)dx=\pi\int_1^2\left(2x+\frac{1}{x}\right)^2dx=\pi\int_1^2\left(4x^2+4+\frac{1}{x^2}\right)dx=\pi\left(4\frac{x^3}{3}+4x-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^2=$

$=\pi\left(\frac{32}{3}+8-\frac{1}{2}\right)-\pi\left(\frac{4}{3}+4-1\right)=\frac{109\pi}{6}-\frac{13\pi}{3}=\frac{83\pi}{6}<\frac{84\pi}{6}=14\pi$