Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

Examenul de bacalaureat naţional 2016

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinaţi numărul real x, ştiind că numerele 7, $3x$ şi x^2+2 sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
5p	**2.** Determinaţi numărul real m, ştiind că parabola asociată funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+m$ este tangentă axei Ox.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-9}=32^x$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând o submulţime a mulţimii $A=\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6}\}$, aceasta să aibă cel mult două elemente.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,0)$, $B(1,0)$ şi $C(1,4)$. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul B şi este paralelă cu mediana din A a triunghiului ABC.
5p	**6.** Calculaţi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $A=\frac{3\pi}{4}$ şi $BC=\sqrt{2}$.

Soluţii

Subiectul1

1.Trei numere reale a,b,c sunt in progresie aritmetică dacă şi numai dacă $\frac{a+c}{2}=b$.

$\frac{7+x^2+2}{2}=3x$

$x^2-6x+9=0$

Se obţine o singură soluţie $x=3$.

2.Punem condiţia $\Delta=0$.

$\Delta=4-4m$

$4-4m=0$

$m=1$

3.

$\left(2^{-1}\right)^{4x-9}=\left(2^5\right)^x$

$2^{9-4x}=2^{5x}$

$9-4x=5x$

$x=1$

4.Probabilitatea unui eveniment se calculează cu formula $P=\frac{numarcazurifavorabile}{numarcazuriposibile}$

O mulţime cu n elemente are 2^n submulţimi.

Mulţimea A are $2^6=64$ submulţimi deci sunt 64 de cazuri posibile.
Mulţimea A are $C_6^0=1$ submulţimi cu 0 elemente (mulţimea vidă).
Mulţimea A are $C_6^1=6$ submulţimi cu 1 element.
Mulţimea A are $C_6^2=15$ submulţimi cu 2 elemente.
In total sunt 1+6+15=22 cazuri favorabile.

$P=\frac{22}{64}=\frac{11}{32}$

5.Mijlocul segmentului BC este $M\left(\frac{1+1}{2},\frac{0+4}{2}\right)\Rightarrow M(1,2)$.

Mediana AM are panta $m_{AM}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-0}{1-(-1)}=1$

Două drepte sunt paralele dacă au aceeaşi pantă.

$m_d=m_{AM}=1$

Dreapta cerută d are panta $m_d=1$ şi trece prin punctul $B(1,0)$.

Ecuaţia dreptei d se află cu formula $y-y_0=m(x-x_0)$.

$y-0=1(x-1)$

$y=x-1$

6.Din teorema sinusurilor avem:

$\frac{BC}{\sin A}=2R$

$\frac{\sqrt{2}}{\sin\frac{3\pi}{4}}=2R$

$\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2R$

$2R=2$

$R=1$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(10))=1024$.

5p **b)** Determinaţi numerele reale x, ştiind că $A(x)\cdot A(2x)=A(x^2+2)$.

5p **c)** Ştiind că $A(n)=A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)\cdot\ldots\cdot A(2016)$, demonstraţi că n este număr natural divizibil cu 2017.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-5X+a$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $f(0)=a$.

5p **b)** Determinaţi numărul real a pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=2016-4a$, unde x_1, x_2 şi x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Demonstraţi că polinomul f are cel mult o rădăcină în mulţimea numerelor întregi.

Subiectul 2

1.a) $A(10)=\begin{pmatrix}1 & 10 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^{10}\end{pmatrix}$

$\det\left(A(10)\right)=\begin{vmatrix}1 & 10 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^{10}\end{vmatrix}=2^{10}+0+0-0-0-0=2^{10}=1024$

b) $A(x)\cdot A(2x)=\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^{x}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^{2x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^{3x}\end{pmatrix}$

$A\left(x^2+2\right)=\begin{pmatrix}1 & x^2+2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^{x^2+2}\end{pmatrix}$

$A(x)\cdot A(2x)=A\left(x^2+2\right)\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 3x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^{3x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x^2+2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^{x^2+2}\end{pmatrix}$

Se obţine ecuaţia $x^2-3x+2=0$ cu soluţiile $x_1=1$ şi $x_2=2$.

c) $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^{x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & y & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & x+y & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^{x+y}\end{pmatrix}=A(x+y),\forall x,y\in R$

$A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)\cdot\ldots\cdot A(2016)=A(1+2+3+\ldots+2016)=A\left(\dfrac{2016(2016+1)}{2}\right)=A(1008\cdot 2017)$

$A(n)=A(1008\cdot 2017)\Rightarrow n=1008\cdot 2017\Rightarrow n\,\vdots\,2017$

2.a) $f(0)=0^3-5\cdot 0+a=a$

b) Din relaţiile lui Viete obţinem $x_1+x_2+x_3=0$

$x_1^3-5x_1+a=0$

$x_2^3-5x_2+a=0$

$x_3^3-5x_3+a=0$

Prin adunarea celor trei relaţii de mai sus rezultă $x_1^3+x_2^3+x_3^3-5\left(x_1+x_2+x_3\right)+3a=0$

$\Rightarrow x_1^3+x_2^3+x_3^3=-3a$

Se obţine egalitatea $-3a=2016-4a$ de unde $a=2016$

c) Presupunem, prin reducere la absurd, ca polinomul f are cel puţin două rădăcini intregi.

Dacă $x_1,x_2\in Z$ din relaţia $x_1+x_2+x_3=0$ rezultă că şi $x_3\in Z$.

$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-5$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=\left(x_1+x_2+x_3\right)^2-2\left(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3\right)=-2\cdot(-5)=10$

Dacă $x_1^2\geq x_2^2\geq x_3^2$ rezultă $x_1^2=9$, $x_2^2=1$ şi $x_3^2=0$.

$x_1\in\{-3,3\}$ $x_2\in\{-1,1\}$ şi $x_3=0$.

Dar aceste numere nu verifică relaţia $x_1+x_2+x_3=0$.

In concluzie, presupunerea făcută este falsă.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=e^x-x-1$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.
5p	**c)** Demonstraţi că $f(2\sqrt{3})<f(3\sqrt{2})$.
	2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1(1-x^2)^n dx$.
5p	**a)** Arătaţi că $I_1=\frac{2}{3}$.
5p	**b)** Demonstraţi că $I_{n+1}\le I_n$, pentru orice număr natural nenul n.
5p	**c)** Demonstraţi că $(2n+3)I_{n+1}=2(n+1)I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

Subiectul 3

1.a) $f'(x)=\left(e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1\right)'=\left(e^x\right)'-\left(\frac{1}{2}x^2\right)'-x'-1'=e^x-\frac{1}{2}2x-1-0=e^x-x-1, x\in R$

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-x-1}{e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x-x-1\right)'}{\left(e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{e^x-x-1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x-1\right)'}{\left(e^x-x-1\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x-1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(e^x\right)'}{\left(e^x-1\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x}=1$$

In rezolvarea de mai sus s-a aplicat de mai multe ori regula lui l'Hospital.

c) $f''(x)=\left(e^x-x-1\right)'=e^x-1>0,\forall x>0$ deci funcţia f' este crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

$f'(0)=e^0-0-1=0\Rightarrow f'(x)>0,\forall x\in(0,+\infty)$ deci funcţia f este strict crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

$\sqrt{12}<\sqrt{18}\Rightarrow 2\sqrt{3}<3\sqrt{2}\Rightarrow f\left(2\sqrt{3}\right)<f\left(3\sqrt{2}\right)$

2.a) $I_1=\int_0^1\left(1-x^2\right)dx=\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\left(1-\frac{1^3}{3}\right)-\left(0-\frac{0^3}{3}\right)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

b) $I_{n+1}-I_n=\int_0^1\left(1-x^2\right)^{n+1}dx-\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx=\int_0^1\underbrace{\left(-x^2\right)}_{-}\underbrace{\left(1-x^2\right)^n}_{+}dx\le 0,\forall n\in N^*$

$I_{n+1}\le I_n,\forall n\in N^*$

c) $I_{n+1}=\int_0^1 x'\left(1-x^2\right)^{n+1}dx=x\left(1-x^2\right)^{n+1}\Big|_0^1-\int_0^1 x(n+1)\left(1-x^2\right)^n(-2x)dx=-2(n+1)\int_0^1\left(1-x^2\right)^n\left(1-x^2-1\right)dx=$

$=-2(n+1)\int_0^1\left(\left(1-x^2\right)^{n+1}-\left(1-x^2\right)^n\right)dx=-2(n+1)I_{n+1}+2(n+1)I_n$

$\Rightarrow(2n+3)I_{n+1}=2(n+1)I_n,\forall n\in N^*$