Ministerul Educaţiei Naţionale
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

Examenul de bacalaureat naţional 2018
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătaţi că numărul $n=\sqrt{8}\left(\sqrt{2}+1\right)-2\sqrt{2}$ este pătratul unui număr natural.
5p	**2.** Se consideră funcţiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+2$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+1$. Determinaţi numărul real a pentru care $f(a)=g(a)$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2x^2-6x+5}=x-1$.
5p	**4.** Determinaţi câte numere naturale de trei cifre distincte au cifrele elemente ale mulţimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ şi $B(3,0)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin mijlocul segmentului AO și este paralelă cu dreapta AB.
5p	**6.** Arătaţi că $(\sin x+7\cos x)^2+(7\sin x-\cos x)^2=50$, pentru orice număr real x.

Soluţii

Subiectul1

1. $n=\sqrt{16}+\sqrt{8}-2\sqrt{2}=4+2\sqrt{2}-2\sqrt{2}=4=2^2$

2. $f(a)=a^2-a+2$

$g(a)=a+1$

$a^2-a+2=a+1$

$a^2-2a+1=0$

$(a-1)^2=0\Rightarrow a=1$

3. Condiţie de existenţă: $2x^2-6x+5\geq 0$

$\left(\sqrt{2x^2-6x+5}\right)^2=(x-1)^2$

$2x^2-6x+5=x^2-2x+1$

$x^2-4x+4=0\Leftrightarrow (x-2)^2=0$

$x=2$

Verificare:

$\sqrt{2\cdot 2^2-6\cdot 2+5}=2-1$

$\sqrt{1}=1$

4. $A_5^3=\dfrac{5!}{(5-3)!}=\dfrac{5!}{2!}=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2}=3\cdot 4\cdot 5=60$

5. Cunoştinţe necesare:

- Mijlocul unei segment $M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

- Panta unei drepte care trece prin două puncte date $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
- Ecuaţia unei drepte care trece printr-un punct dat şi are panta dată: $y-y_0=m(x-x_0)$
- Două drepte sunt paralele dacă şi numai dacă au aceeaşi pantă.

$m_{AB}=\frac{0-1}{3-2}=-1$

$d \parallel AB \Rightarrow m_d=m_{AB}=-1$

Mijlocul segmentului AO este $M\left(\frac{0+2}{2},\frac{0+1}{2}\right)\Rightarrow M\left(1,\frac{1}{2}\right)$

Ecuaţia dreptei d este $y-\frac{1}{2}=-1(x-1)$

$y-\frac{1}{2}=-x+1$

$y=-x+\frac{3}{2}$

6. $(\sin x+7\cos x)^2=\sin^2 x+14\sin x\cos x+49\cos^2 x$

$(7\sin x-\cos x)^2=49\sin^2 x-14\sin x\cos x+\cos^2 x$

$(\sin x+7\cos x)^2+(7\sin x-\cos x)^2=\sin^2 x+14\sin x\cos x+49\cos^2 x+49\sin^2 x-14\sin x\cos x+\cos^2 x=$

$=50\sin^2 x+50\cos^2 x=50(\sin^2 x+\cos^2 x)=50\cdot 1=50,\forall x\in R$

S-a folosit mai sus formula $\sin^2 x+\cos^2 x=1,\forall x\in R$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ m & m+1\end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(m)+A(-m)=2A(0)$, pentru orice număr real m.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(2)\cdot X=A(5)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=3xy+3x+3y+2$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=3(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $x\circ\left(-\frac{2}{3}\right)=x$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele naturale n pentru care $n\circ(n-1)<17$.

Subiectul 2

1.a) $A(0)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(0))=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-2\cdot 0=1$

b) $A(m)+A(-m)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ m & m+1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ -m & -m+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=2A(0),\forall m\in R$

c) Metoda 1

$X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},a,b,c,d\in R$

$A(2)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ şi $A(5)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 6\end{pmatrix}$

$A(2)\cdot X = A(5) \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 6\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a+2c & b+2d\\ 2a+3c & 2b+3d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 6\end{pmatrix}$

Se obţin următoarele sisteme de două ecuaţii cu două necunoscute:

$\begin{cases}a+2c=1\\ 2a+3c=5\end{cases}$ cu soluţia $\begin{cases}a=7\\ c=-3\end{cases}$

$\begin{cases}b+2d=2\\ 2b+3d=6\end{cases}$ cu soluţia $\begin{cases}b=6\\ d=-2\end{cases}$

$\Rightarrow X=\begin{pmatrix}7 & 6\\ -3 & -2\end{pmatrix}$

Metoda 2

Se calculează inversa matricei $A(2)$ parcurgand următoarele etape:

Etapa 1. $\det(A(2))=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=3-4=-1$

Etapa 2.Matricea transpusă este $(A(2))^t=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

Etapa 3.Matricea adjunctă este $(A(2))^*=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}$

Etapa 4.Matricea inversă este $(A(2))^{-1}=\dfrac{1}{\det(A(2))}\cdot(A(2))^*=\dfrac{1}{-1}\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

Se inmulţeşte egalitatea $A(2)\cdot X=A(5)$ la stanga cu $(A(2))^{-1}$.

$\Rightarrow X=(A(2))^{-1}\cdot A(5)=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 5 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 6\\ -3 & -2\end{pmatrix}$

2.a) $x\circ y=3xy+3x+3y+3-1=3x(y+1)+3(y+1)-1=(3x+3)(y+1)-1=3(x+1)(y+1)-1, \forall x,y\in R$

b) $x\circ\left(-\frac{2}{3}\right)=3x\left(-\frac{2}{3}\right)+3x+3\left(-\frac{2}{3}\right)+2=-2x+3x-2+2=x, \forall x\in R$

c) $n\circ(n-1)=3(n+1)(n-1+1)-1=3n(n+1)-1=3n^2+3n-1$

$n\circ(n-1)<17 \Leftrightarrow 3n^2+3n-1<17 \Leftrightarrow 3n^2+3n-18<0 \Leftrightarrow n^2+n-6<0$ (*)

Se rezolvă ecuaţia $x^2+x-6=0$

$\Delta=1^2-4\cdot1\cdot(-6)=25$

$x_1=-3$

$x_2=2$

x	$-\infty$ -3 2 $+\infty$
x^2+x-6	+ + + + + + 0 - - - - - - - 0 + + + + + + +

Revenind la inecuaţia (*) obţinem $n\in(-3,2)$ şi cum n este număr natural rezultă $n=0$ sau $n=1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+6x}{x-2}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{(x-6)(x+2)}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că funcţia f **nu** are puncte de inflexiune.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{e^x+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1(e^x+1)f(x)dx=1$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1\dfrac{x}{f(x)}dx=\dfrac{3}{2}$.

5p **c)** Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{e^x f(x)}$.

Subiectul 3

1.a) $f'(x)=\left(\dfrac{x^2+6x}{x-2}\right)'=\dfrac{(x^2+6x)'(x-2)-(x^2+6x)(x-2)'}{(x-2)^2}=\dfrac{(2x+6)(x-2)-(x^2+6x)\cdot 1}{(x-2)^2}=$

$=\dfrac{2x^2-4x+6x-12-x^2-6x}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x-12}{(x-2)^2}=\dfrac{(x-6)(x+2)}{(x-2)^2},x\in(2,+\infty)$

b) Ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f este $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2+6x}{x-2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+6x}{x(x-2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(x+6)}{x(x-2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+6}{x-2}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+6)'}{(x-2)'}=\frac{1}{1}=1$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+6x}{x-2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+6x-x^2+2x}{x-2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{8x}{x-2}\right)\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(8x)'}{(x-2)'}=\frac{8}{1}=8$$

deci dreapta de ecuaţie $y = x + 8$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c) $f''(x)=\left(\dfrac{x^2-4x-12}{(x-2)^2}\right)'=\dfrac{(x^2-4x-12)'(x-2)^2-(x^2-4x-12)\left[(x-2)^2\right]'}{(x-2)^4}=$

$=\dfrac{(2x-4)(x-2)^2-(x^2-4x-12)2(x-2)}{(x-2)^4}=\dfrac{(x-2)\left[(2x-4)(x-2)-2(x^2-4x-12)\right]}{(x-2)^4}=$

$=\dfrac{2x^2-4x-4x+8-2x^2+8x+24}{(x-2)^3}=\dfrac{32}{(x-2)^3}>0,\forall x\in(2,+\infty)$ deci funcţia f nu are puncte de inflexiune.

2.a) $\int_0^1(e^x+1)f(x)dx=\int_0^1(e^x+1)\dfrac{1}{e^x+1}dx=\int_0^1 1dx=x\Big|_0^1=1-0=1$

b) $\int_0^1 \frac{x}{f(x)}dx = \int_0^1 \frac{x}{\frac{1}{e^x+1}}dx = \int_0^1 x\left(e^x+1\right)dx = \int_0^1 \left(xe^x + x\right)dx = \underbrace{\int_0^1 xe^x dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^1 xdx}_{I_2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$I_1 = \int_0^1 xe^x dx = \int_0^1 x\left(e^x\right)' dx = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 x'e^x dx = 1\cdot e^1 - 0\cdot e^0 - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = e - (e-1) = e - e + 1 = 1$

S-a folosit mai sus metoda integrării prin părţi.

$I_2 = \int_0^1 xdx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$

c)

$$V = \pi\int_0^1 g^2(x)dx = \pi\int_0^1 e^x f(x)dx = \pi\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx = \pi\int_0^1 \frac{\left(e^x+1\right)'}{e^x+1}dx = \pi\ln\left(e^x+1\right)\Big|_0^1 = \pi\left(\ln(e+1) - \ln 2\right) = \pi\ln\frac{e+1}{2}$$