Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că numărul $n=\log_3\left(\sqrt{7}-2\right)+\log_3\left(\sqrt{7}+2\right)$ este natural.
5p	**2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+6x+3$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x+2)^3=(2-x)^3$.
5p	**4.** Calculați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu elemente ale mulțimii $\{0,2,4,6,8\}$.
5p	**5.** Punctele M, N și P verifică relația $2\overrightarrow{MN}+3\overrightarrow{NP}=\vec{0}$. Calculați lungimea segmentului MP, știind că $MN=3$.
5p	**6.** Arătați că $\sin x+\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)+\sin(2\pi-x)=0$, pentru orice număr real x.

Soluții

Subiectul1

1. Folosim formula $\log_a A+\log_a B=\log_a(A\cdot B)$

$$\log_3\left(\sqrt{7}-2\right)+\log_3\left(\sqrt{7}+2\right)=\log_3\left[\left(\sqrt{7}-2\right)\left(\sqrt{7}+2\right)\right]=\log_3\left(\sqrt{7}^2-2^2\right)=\log_3 3=1\in N$$

2. Abscisele punctelor de intersecţie a două grafice se obţin rezolvand ecuaţia $f(x)=g(x)$.

$2x-1=x^2+6x+3$

$x^2+4x+4=0$

$\Delta=0\Rightarrow x_1=x_2=-2$

$f(-2)=g(-2)=-5$ deci cele două grafice au un singur punct comun $A(-2,-5)$

Obs: Graficul funcţiei f este o dreaptă iar graficul funcţiei g este o parabolă. In situaţia din exerciţiu dreapta este tangentă parabolei in punctul A.

3. $(x+2)^3=(2-x)^3\Leftrightarrow x+2=2-x\Leftrightarrow 2x=0\Leftrightarrow x=0$

4. Metoda 1 (din barem)
Cifra zecilor poate fi aleasă în 4 moduri
Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în 4 moduri, deci se pot forma $4\cdot 4=16$ numere

Metoda 2

Toate submulţimile ordonate de două elemente din mulţimea dată sunt in număr de $A_5^2=\dfrac{5!}{(5-2)!}=\dfrac{5!}{3!}=4\cdot 5=20$.

Submulţimile ordonate de două elemente care incep cu cifra 0 (01,02,03,04)sunt in număr de $A_4^1=\dfrac{4!}{(4-1)!}=\dfrac{4!}{3!}=4$

Numărul cerut in exerciţiu este $A_5^2-A_4^1=20-4=16$.

5. Din egalitatea dată in exerciţiu rezultă $\overrightarrow{NP}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{MN}$

$$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{NP}-\overrightarrow{NM}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MN}$$

$$\left\|\overrightarrow{MP}\right\|=\left\|\frac{1}{3}\overrightarrow{MN}\right\|=\frac{1}{3}\left\|\overrightarrow{MN}\right\|=\frac{1}{3}\cdot 3=1$$

deci lungimea segmentului MP este egală cu 1.

6. Se pot folosi formulele:

$$\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$$

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$$

Rezultă :

$$\sin(\pi-x)=\sin\pi\cos x-\sin x\cos\pi=0\cdot\cos x-\sin x(-1)=\sin x,\forall x\in R$$

$$\sin(\pi+x)=\sin\pi\cos x+\sin x\cos\pi=0\cdot\cos x+\sin x(-1)=-\sin x,\forall x\in R$$

$$\sin(2\pi-x)=\sin 2\pi\cos x-\sin x\cos 2\pi=0\cdot\cos x-\sin x\cdot 1=-\sin x,\forall x\in R$$

$$\sin x+\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)+\sin(2\pi-x)=\sin x+\sin x-\sin x-\sin x=0,\forall x\in R$$

SUBIECTUL al II-lea	**(30 de puncte)**
	1. Se consideră matricea $A(x,y)=\begin{pmatrix} x & y & 1\\ 1 & x & y\\ x & 1 & y\end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(2,3))=12$.
5p	**b)** Demonstrați că $\det\left(A\left(n^2,n\right)\right)\geq 0$, pentru orice număr natural n.
5p	**c)** Determinați numărul real x pentru care inversa matricei $B=A(x,0)\cdot A(x,0)$ este matricea $A(x,0)$.
	2. Se consideră polinomul $f=nX^n+X^2-nX-1$, unde n este număr natural, $n\geq 3$.
5p	**a)** Arătați că $f(1)=0$, pentru orice număr natural n, $n\geq 3$.
5p	**b)** Arătați că, dacă n este număr natural impar, $n\geq 3$, atunci polinomul f este divizibil cu X^2-1.
5p	**c)** Arătați că, pentru orice număr natural n, $n\geq 5$, polinomul f **nu** are rădăcini în mulțimea $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$.

Subiectul 2

1.a) $A(2,3)=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$

$$\det(A(2,3))=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}=12+1+18-4-6-9=31-19=12$$

b) $A\left(n^2,n\right)=\begin{pmatrix} n^2 & n & 1\\ 1 & n^2 & n\\ n^2 & 1 & n\end{pmatrix}$

$$\det\left(A\left(n^2,n\right)\right)=\begin{vmatrix} n^2 & n & 1\\ 1 & n^2 & n\\ n^2 & 1 & n\end{vmatrix}=$$

Se adună ultimele două coloane la prima coloană

$$=\begin{vmatrix} n^2+n+1 & n & 1 \\ n^2+n+1 & n^2 & n \\ n^2+n+1 & 1 & n \end{vmatrix}=\left(n^2+n+1\right)\begin{vmatrix} 1 & n & 1 \\ 1 & n^2 & n \\ 1 & 1 & n \end{vmatrix}=$$

Se scade prima linie din ultimele două linii

$$=\left(n^2+n+1\right)\begin{vmatrix} 1 & n & 1 \\ 0 & n^2-n & n-1 \\ 0 & 1-n & n-1 \end{vmatrix}=\left(n^2+n+1\right)\begin{vmatrix} 1 & n & 1 \\ 0 & n(n-1) & n-1 \\ 0 & 1-n & n-1 \end{vmatrix}=\left(n^2+n+1\right)(n-1)^2\begin{vmatrix} 1 & n & 1 \\ 0 & n & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=\left(n^2+n+1\right)(n-1)^2(n+1)\geq 0, \forall n\in N$$

c) $A(x,0)=\begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ x & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$B=A(x,0)\cdot A(x,0)=\begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ x & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ x & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2+x & 1 & x \\ 2x & x^2 & 1 \\ x^2+1 & x & x \end{pmatrix}$$

$$B\cdot A(x,0)=A(x,0)\cdot B=\begin{pmatrix} x^3+2x^2+1 & 2x & x^2+x \\ 3x^2+x & x^3+1 & 2x \\ x^3+x^2+2x & x^2+x & x^2+1 \end{pmatrix}$$

Inversa matricei B este matricea $A(x,0)$ dacă şi numai dacă $B\cdot A(x,0)=A(x,0)\cdot B=I_3$

$\begin{pmatrix} x^3+2x^2+1 & 2x & x^2+x \\ 3x^2+x & x^3+1 & 2x \\ x^3+x^2+2x & x^2+x & x^2+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de unde rezultă $x=0$.

2.a) $f(1)=n\cdot 1^n+1^2-n\cdot 1-1=n+1-n-1=0$ pentru orice număr natural $n, n\geq 3$.

b) Dacă n este număr natural impar $n\geq 3$ atunci avem $f(-1)=n\cdot(-1)^n+(-1)^2-n(-1)-1=-n+1+n-1=0$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=0\Rightarrow f \vdots X-1 \\ f(-1)=0\Rightarrow f \vdots X+1 \end{array}\right\}\Rightarrow f \vdots (X-1)(X+1)\Rightarrow f \vdots X^2-1$$

c) Presupunem prin reducere la absurd că polinomul f are o rădăcină α in mulţimea $Q\setminus Z$.

Cum f are coeficienţi intregi rezultă că $\alpha=\frac{1}{d}$ unde d este divizor al lui n şi $d\in Z\setminus\{-1,0,1\}$, $|d|\geq 2$.

$$f(\alpha)=0\Rightarrow f\left(\frac{1}{d}\right)=0\Rightarrow \frac{n}{d^n}+\frac{1}{d^2}-\frac{n}{d}-1=0\Rightarrow n+d^{n-2}-nd^{n-1}-d^n=0$$

$$d^n+nd^{n-1}-d^{n-2}=n\Rightarrow d^{n-2}\left(d^2+nd-1\right)=n\Rightarrow d^{n-2}/n\Rightarrow |d|^{n-2}\leq n$$

Dar din $|d|\geq 2$ rezultă $|d|^{n-2}\geq 2^{n-2}>n$ pentru orice număr natural $n, n\geq 5$ deci s-a obţinut o contradicţie.
Rezultă că polinomul f nu are rădăcini in mulţimea $Q\setminus Z$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}x-x$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=-\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstraţi că $f(x)+g(x)=\dfrac{\pi}{2}$, pentru orice număr real x, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{arcctg}x+x$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x^2}$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx=\dfrac{e-1}{e}$.
5p	**b)** Arătaţi că orice primitivă a funcţiei f este concavă pe $(0,+\infty)$.
5p	**c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx$. Demonstraţi că şirul $(I_n)_{n\geq1}$ este convergent.

Subiectul 3

1.a) $f'(x)=(arctgx-x)'=(arctgx)'-x'=\dfrac{1}{x^2+1}-1=\dfrac{1-x^2-1}{x^2+1}=-\dfrac{x^2}{x^2+1},\forall x\in R$

b) Ecuaţia asimptotei oblice este $y=mx+n$.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{arctgx-x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{arctgx}{x}-1\right)=\frac{arctg(+\infty)}{+\infty}-1=\frac{\frac{\pi}{2}}{+\infty}-1=0-1=-1$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to+\infty}(arctgx-x+x)=\lim_{x\to+\infty}arctgx=\frac{\pi}{2}$$

Ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f este $y=-x+\dfrac{\pi}{2}$

c) Luăm funcţia $h:R\to R, h(x)=f(x)+g(x)$

$h(x)=arctgx+arcctgx$

$h'(x)=(arctgx+arcctgx)'=\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{1}{x^2+1}=0,\forall x\in R$ deci funcţia h este constantă pe **R**.

$h(0)=arctg0+arcctg0=0+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$

$\Rightarrow h(x)=\dfrac{\pi}{2},\forall x\in R$ deci $f(x)+g(x)=\dfrac{\pi}{2},\forall x\in R$

2.a) $\int_0^1 f(\sqrt{x})dx=\int_0^1 e^{-x}dx=-e^{-x}\Big|_0^1=-e^{-1}+e^0=-\dfrac{1}{e}+1=\dfrac{e-1}{e}$

b) Fie F o primitivă oarecare a funcţiei f deci $F'(x)=f(x),\forall x\in R$

$F''(x)=f'(x)=\left(e^{-x^2}\right)'=e^{-x^2}\cdot\left(-x^2\right)'=-2x\cdot e^{-x^2},\forall x\in R$

$F''(x)=\underset{-}{-2x}\cdot\underset{+}{e^{-x^2}}<0,\forall x\in(0,+\infty)$ deci funcţia F este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.

c) $I_{n+1}-I_n=\int_{\frac{1}{n+1}}^{1} f(x)dx-\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx=\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x)dx=\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} e^{-x^2}dx \geq 0, \forall n \in N, n \geq 1$

$\Rightarrow I_{n+1} \geq I_n$ pentru orice număr natural nenul n.

$0 \leq I_n=\int_{\frac{1}{n}}^{1} e^{-x^2}dx \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} 1dx = x\Big|_{\frac{1}{n}}^{1}=1-\frac{1}{n}<1$ pentru orice număr natural nenul n.

Sirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este monoton (crescător) şi marginit deci conform teoremei lui Weierstrass este convergent.