Ministerul Educației Naționale
Centrul Național de Evaluare și Examinare

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

5p	**1.** Determinați elementele mulțimii $M=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{3}{x+1}\in\mathbb{N}\right\}$.
5p	**2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-mx-1=0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că $\frac{x_1^2-1}{x_1}+\frac{x_2^2-1}{x_2}=2$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2-x}-x=0$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\left\{\log_2 n\,\middle|\,n\in\mathbb{N}^*,\ n\le 20\right\}$, acesta să fie număr natural.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(0,2)$ și $P(1,1)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului MP.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=5\sqrt{2}$, $m(\sphericalangle A)=45^\circ$ și $m(\sphericalangle C)=30^\circ$. Determinați lungimea laturii BC.

Soluții

Subiectul1

1. $x+1\in\{1;3\}\Rightarrow x\in\{0;2\}$ deci $M=\{0;2\}$

2. – rezolvare diferită de cea din barem

Folosind relațiile lui Viete obținem:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-m}{1}=m$$

$$x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{-1}{1}=-1$$

Condiția dată în enunț devine:

$$\frac{x_1^2}{x_1}-\frac{1}{x_1}+\frac{x_2^2}{x_2}-\frac{1}{x_2}=2$$

$$x_1-\frac{1}{x_1}+x_2-\frac{1}{x_2}=2$$

$$x_1+x_2-\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=2$$

$$m+m=2\Rightarrow m=1$$

3. Condiție de existență $2-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 2$

$\sqrt{2-x}=x$

$\left(\sqrt{2-x}\right)^2=x^2$

$x^2+x-2=0$ care are soluțiile $x_1=1$ și $x_2=-2$.

Doar $x_1=1$ verifică ecuația dată în enunț (la ecuațiile iraționale verificarea soluțiilor este obligatorie).

4. $A=\{\log_2 1, \log_2 2, ..., \log_2 20\}$

Mulțimea A are 20 de elemente deci sunt 20 de cazuri posibile.

Numerele naturale din mulțimea A sunt:

$\log_2 1=0$

$\log_2 2=1$

$\log_2 4=2$

$\log_2 8=3$

$\log_2 16=4$

deci sunt 5 cazuri posibile.

$P=\dfrac{numarcazurifavorabile}{numarcazuriposibile}=\dfrac{5}{20}=\dfrac{1}{4}$

5. Mijlocul segmentului MP este $A\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)\Rightarrow A\left(\dfrac{0+1}{2},\dfrac{2+1}{2}\right)\Rightarrow A\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$

Panta dreptei MP este $m_{MP}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{1-2}{1-0}=-1$.

Dacă d este mediatoarea segmentului MP atunci din $d\perp MP \Rightarrow m_d\cdot m_{MP}=-1\Rightarrow m_d=1$

Ecuația mediatoarei se calculează cu formula $y-y_0=m(x-x_0)$

$y-\dfrac{3}{2}=1\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\Rightarrow y-\dfrac{3}{2}=x-\dfrac{1}{2}\Rightarrow y-\dfrac{3}{2}-x+\dfrac{1}{2}=0\Rightarrow -x+y-1=0\Rightarrow x-y+1=0$

$d: y=x+1$.

6. Folosim teorema sinusurilor $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$

$\dfrac{BC}{\sin A}=\dfrac{AB}{\sin C}\Rightarrow \dfrac{BC}{\sin 45^0}=\dfrac{5\sqrt{2}}{\sin 30^0}\Rightarrow \dfrac{BC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}\Rightarrow BC=10\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=10$

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $M(m)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ -1 & m & -1\\ m & 1 & 3\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+2y+4z=5\\ -x+my-z=-2\\ mx+y+3z=4\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(0))=3$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** Pentru $m=1$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $4y_0^2=(x_0+z_0)^2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă, cu element neutru, $x*y=\frac{1}{3}xy-\frac{1}{2}(x+y)+\frac{9}{4}$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x*x=x$.

5p **c)** Demonstrați că **nu** există niciun număr natural n al cărui simetric în raport cu legea de compoziție „$*$” să fie număr natural.

Subiectul 2

1.a) $M(0)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$

$\det(M(0))=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 3\end{vmatrix}=0-4-0-0+1+6=3$

b) Sistemul are soluție unică dacă și numai dacă $\det(M(m))\neq 0$

$\det(M(m))=\begin{vmatrix}1 & 2 & 4\\ -1 & m & -1\\ m & 1 & 3\end{vmatrix}=3m-4-2m-4m^2+1+6=-4m^2+m+3$

$\det(M(m))=0 \Leftrightarrow m=1$ sau $m=-\frac{3}{4}$ deci sistemul are soluție unică pentru $m\in R\setminus\left\{-\frac{3}{4},1\right\}$.

c) Pentru $m=1$ un determinant principal al sistemului este $\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1+2=3\neq 0$ deci matricea asociată sistemului are rangul 2.

Determinantul caracteristic este $\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ -1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 4\end{vmatrix}=4-5-4-5+2+8=0$ deci sistemul este compatibil simplu nedeterminat.

Primele două ecuații sunt principale iar x și y sunt necunoscute principale.

Notăm necunoscuta secundară $z=\alpha$.

$\begin{cases}x+2y=5-4\alpha\\ -x+y=\alpha-2\end{cases}$ care se poate rezolva prin metoda reducerii și rezultă că sistemul inițial are soluția

$$\begin{cases} x = 3-2\alpha \\ y = 1-\alpha \\ z = \alpha \end{cases}, \alpha \in C.$$

Căutăm soluția (x_0, y_0, z_0) care îndeplinește condiția $4y_0^2 = (x_0 + z_0)^2$.

$4(1-\alpha)^2 = (3-\alpha)^2$ care conduce la $3\alpha^2 - 2\alpha - 5 = 0$. Rezultă $\alpha = -1$ sau $\alpha = \frac{5}{3}$.

Pentru $\alpha = -1$ obținem soluția $(5, 2, -1)$ iar pentru $\alpha = \frac{5}{3}$ obținem $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

2.a) $x * y = \frac{1}{3}xy - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{4} + \frac{6}{4} = \frac{1}{3}\left(xy - \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}y + \frac{9}{4}\right) + \frac{3}{2} = \frac{1}{3}\left[x\left(y-\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(y-\frac{3}{2}\right)\right] + \frac{3}{2} =$

$= \frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}, x, y \in R$

b) Se folosește formula de la punctul a)

$$x * x = \frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}$$

$$x * x * x = \left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{2}\right] * x = \frac{1}{9}\left(x-\frac{3}{2}\right)^3 + \frac{3}{2}$$

Ecuația de la punctul b) devine:

$$\frac{1}{9}\left(x-\frac{3}{2}\right)^3 + \frac{3}{2} = x$$

$$\frac{1}{9}\left(x-\frac{3}{2}\right)^3 - \left(x-\frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)\left[\frac{1}{9}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - 1\right] = 0$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)+1\right]\left[\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)-1\right] = 0$$

Egalând fiecare paranteză cu 0 se obțin soluțiile $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -\frac{3}{2}$ și $x_3 = \frac{9}{2}$.

c) Aflăm elementul neutru al legii de compoziție

$$x * e = e * x = x, \forall x \in R$$

$$\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(e-\frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2} = x, \forall x \in R$$

$$\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(e-\frac{3}{2}\right) - \left(x-\frac{3}{2}\right) = 0, \forall x \in R$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)\left[\frac{1}{3}\left(e-\frac{3}{2}\right) - 1\right] = 0, \forall x \in R$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\left(e-\frac{3}{2}\right) - 1 = 0 \Rightarrow e = 3 + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

Presupunem, prin reducere la absurd, că există un număr natural n al cărui simetric în raport cu legea de compoziție $*$ este tot număr natural n'.

$$\Rightarrow n*n' = n'*n = \frac{9}{2}$$

$$\frac{1}{3}nn' - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}n' + \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$$

$$\frac{1}{3}nn' - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}n' = \frac{9}{4}$$

$$4nn' - 6n - 6n' = 27$$

S-a ajuns la o contradicție deoarece membrul stâng este par iar membrul drept este impar.
Rezultă că presupunerea făcută este falsă, deci nu există niciun număr n al cărui simetric în raport cu legea de compoziție $*$ să fie tot număr natural.

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(x^2+x+1)$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x) = \dfrac{x(x-1)}{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y = -\dfrac{1}{7}x + 2$.
5p	**c)** Demonstrați că pentru fiecare număr natural nenul n, ecuația $f(x) + n = 0$ are soluție unică.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^2 e^x f(x)\,dx = 2$.
5p	**b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-1$ și $x=1$ are aria egală cu $2 - \dfrac{2}{e}$.
5p	**c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n = \int_0^1 x^n f(x)\,dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+2)I_n = \dfrac{1}{e}$.

<u>Subiectul 3</u>

1.a) $f'(x) = \left(x - \ln(x^2+x+1)\right)' = x' - \left(\ln(x^2+x+1)\right)' = 1 - \dfrac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} = 1 - \dfrac{2x+1}{x^2+x+1} =$

$= \dfrac{x^2+x+1-2x-1}{x^2+x+1} = \dfrac{x^2-x}{x^2+x+1} = \dfrac{x(x-1)}{x^2+x+1}, x\in R$

b) Dreapta dată în enunț are panta $m = -\dfrac{1}{7}$.

Pentru a determina abscisele punctelor de pe grafic în care tangenta este paralelă cu dreapta dată trebuie să rezolvăm ecuația $f'(x)=-\frac{1}{7}$.

$\frac{x(x-1)}{x^2+x+1}=-\frac{1}{7}$

$7x(x-1)=-(x^2+x+1)$

$8x^2-6x+1=0$

$\Delta=4$

Se obțin soluțiile $x_1=\frac{1}{2}$ și $x_2=\frac{1}{4}$.

c) Funcția dată este continuă.
Se face tabelul de variație al funcției.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\ln\left(x^2+x+1\right)\right)=-\infty-\infty=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\ln\left(x^2+x+1\right)\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln\left(x^2+x+1\right)}{x}\right)=+\infty(1-0)=+\infty$ deoarece

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2+x+1\right)}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left[\ln\left(x^2+x+1\right)\right]'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x^2+x+1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x+1)'}{\left(x^2+x+1\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2x+1}=\frac{2}{+\infty}=0$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{x(x-1)}{x^2+x+1}=0\Leftrightarrow x(x-1)=0$ care are soluțiile $x_1=0$ și $x_2=1$.

$f(0)=0-\ln 1=0$

$f(1)=1-\ln 3$

$$\left.\begin{array}{l} e<3<e^2 \\ \ln e<\ln 3<\ln e^2 \\ 1<\ln 3<2 \\ -2<-\ln 3<-1 \\ -1<1-\ln 3<0 \end{array}\right\}\Rightarrow 1-\ln 3\in(-1,0)$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+ + + + + +	0	- - - - - -	0	+ + + + + + +	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$1-\ln 3$	$\nearrow$	$+\infty$

Din tabel se observă că *f* este strict descrescătoare pe $(0,1)$ și *f* este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$, deci, pentru fiecare $n\in N^*$, ecuația $f(x)=-n$ nu are nicio soluție în $[0,+\infty)$.

Funcția *f* este strict crescătoare pe $(-\infty,0)\Rightarrow$ pentru fiecare $n\in N^*$, ecuația $f(x)=-n$ are soluție unică în $(-\infty,0)$ deci pentru fiecare $n\in N^*$, ecuația $f(x)+n=0$ are soluție unică (negativă).

2.a) $\int_0^2 e^x f(x)\,dx=\int_0^2 e^x\frac{x}{e^x}\,dx=\int_0^2 x\,dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2=\frac{2^2}{2}-\frac{0^2}{2}=2$

b) Funcția dată este negativă pe intervalul $[-1,0)$ și pozitivă pe intervalul $(0,1]$

$$Aria=\int_{-1}^{1}|f(x)|dx=\underbrace{\int_{-1}^{0}\left(-xe^{-x}\right)dx}_{I_1}+\underbrace{\int_{0}^{1}xe^{-x}dx}_{I_2}=1+1-\frac{2}{e}=2-\frac{2}{e}$$

$$I_1=\int_{-1}^{0}\left(-xe^{-x}\right)dx=\int_{-1}^{0}x\left(e^{-x}\right)'dx=xe^{-x}\Big|_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}x'e^{-x}dx=e+e^{-x}\Big|_{-1}^{0}=e+1-e=1$$

$$I_2=\int_{0}^{1}xe^{-x}dx=\int_{0}^{1}x\left(-e^{-x}\right)'dx=-xe^{-x}\Big|_{0}^{1}+\int_{0}^{1}x'e^{-x}dx=-e^{-1}-e^{-x}\Big|_{0}^{1}=-\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{e}-1\right)=1-\frac{2}{e}$$

c) $(n+2)I_n=(n+2)\int_0^1 x^n f(x)dx=(n+2)\int_0^1 x^n\frac{x}{e^x}dx=(n+2)\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx=$

$$=\int_0^1(n+2)x^{n+1}e^{-x}dx=\int_0^1\left(x^{n+2}\right)'e^{-x}dx=x^{n+2}e^{-x}\Big|_0^1-\int_0^1x^{n+2}\left(e^{-x}\right)'dx=\frac{1}{e}+\int_0^1x^{n+2}e^{-x}dx$$

S-a obținut $(n+2)I_n=\frac{1}{e}+\int_0^1x^{n+2}e^{-x}dx$ (*)

Dacă $0\le x\le 1$ rezultă $\frac{1}{e}\le e^{-x}\le 1$.

$$\frac{1}{e}x^{n+2}\le e^{-x}x^{n+2}\le x^{n+2}$$

Integrând pe intervalul $[0,1]$ obținem

$$\frac{1}{e}\int_0^1x^{n+2}dx\le\int_0^1e^{-x}x^{n+2}dx\le\int_0^1x^{n+2}dx$$

$\int_0^1x^{n+2}dx=\frac{x^{n+3}}{n+3}\Big|_0^1=\frac{1}{n+3}$ și deci $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1x^{n+2}dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+3}=\frac{1}{+\infty}=0$

Din criteriul cleștelui rezultă $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1e^{-x}x^{n+2}dx=0$.

Trecând la limită când $n\to+\infty$ în relația (*) rezultă $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+2)I_n=\frac{1}{e}$