Ministerul Educației Naționale
Centrul Național de Evaluare și Examinare

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

5p	**1.** Arătați că numărul $a=\left(\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}\right)^2$ este întreg, unde $i^2=-1$.
5p	**2.** Determinați cel mai mare număr natural m pentru care soluțiile ecuației $x^2-7x+m=0$ sunt numere reale.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}=117$.
5p	**4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 36 de submulțimi cu două elemente.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(3,-3)$ și $C(3,0)$. Determinați ecuația medianei din C a triunghiului ABC.
5p	**6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\cos x\sin(\pi-x)-\sin x\cos(\pi+x)=1$.

Soluții

Subiectul1

1. Se aduce la același numitor în paranteză

$$a=\left(\frac{1+i-(1-i)}{(1-i)(1+i)}\right)^2=\left(\frac{1+i-1+i}{1-i^2}\right)^2=\left(\frac{2i}{1-(-1)}\right)^2=\left(\frac{2i}{2}\right)^2=i^2=-1\in\mathbb{Z}$$

2. Ecuația de gradul doi are soluții reale dacă și numai dacă $\Delta\geq 0$.

$\Delta=(-7)^2-4\cdot 1\cdot m=49-4m$

$49-4m\geq 0\Leftrightarrow m\leq\frac{49}{4}=12,25$

Cum m este număr natural rezultă $m=12$.

3. Se folosește formula $a^{m+n}=a^m\cdot a^n$ și ecuația dată se scrie $3^x+3^x\cdot 3+3^x\cdot 3^2=117$

$3^x(1+3+9)=117$

$3^x\cdot 13=117$

$3^x=\frac{117}{13}=9$

$x=2$

4. Notăm cu n numărul de elemente al mulțimii.

$C_n^2=36$

$\frac{n(n-1)}{2}=36$

$n^2-n-72=0$

$\Delta = 1 + 288 = 289$

$n_1, n_2 = \dfrac{1 \pm 17}{2}$

$n_1 = -8$ care nu convine

$n_2 = 9$ deci mulțimea dată are 9 elemente.

5. Aflăm mijlocul segmentului AB.

Mijlocul unui segment este $M\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

$M\left(\dfrac{-1+3}{2}, \dfrac{1+(-3)}{2}\right) \Rightarrow M(1,-1)$

Ecuația medianei MC se poate afla cu ajutorul unui determinant astfel $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x + 0 + 3y + 3 - 0 - y = 0$

Ecuația medianei MC este $-x + 2y + 3 = 0$.

Obs:In barem se folosește altă metodă iar ecuația medianei este echivalentă cu cea de mai sus.

6. Folosim formulele $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\cos(\pi + x) = -\cos x$ și $\sin 2x = 2\sin x \cos x$.

Ecuația dată devine:

$\cos x \sin x - \sin x(-\cos x) = 1$

$2\sin x \cos x = 1$

$\sin 2x = 1$

Din $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ rezultă $2x \in (0, \pi)$ și deoarece $\sin 2x = 1$ obținem că $2x = \dfrac{\pi}{2}$ de unde $x = \dfrac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 3 & 2a-1 & 1 \\ a-3 & a & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x + ay + z = 1 \\ 3x + (2a-1)y + z = 1 \\ (a-3)x + ay + z = 2a-1 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0)) = -5$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a)) = 0$.

5p **c)** Pentru $a = 1$, determinați soluțiile (x_0, y_0, z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2 = y_0 z_0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 5xy - 5(x+y) + 6$.

5p **a)** Demonstrați că $x * y = 5(x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x * x * x < 26$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n pentru care $\dfrac{1}{n^2} * \dfrac{1}{(n+1)^2} * \dfrac{1}{(n+2)^2} = -19$.

Subiectul 2

1.a) $A(0)=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&-1&1\\-3&0&1\end{pmatrix}$

$\det(A(0))=\begin{vmatrix}2&0&1\\3&-1&1\\-3&0&1\end{vmatrix}=-2+0+0-3-0-0=-5$

b) Se calculează $\det(A(a))$ folosind regula lui Sarrus sau regula triunghiului:

$\det(A(a))=\begin{vmatrix}2&a&1\\3&2a-1&1\\a-3&a&1\end{vmatrix}=2(2a-1)+3a+a(a-3)-(a-3)(2a-1)-2a-3a=$

$=4a-2+3a+a^2-3a-(2a^2-7a+3)-2a-3a=-a^2+6a-5, \forall a\in\mathbb{R}$

$-a^2+6a-5=0$

$\Delta=36-20=16$

Obținem soluțiile $a_1=1$ și $a_2=5$.

c) Pentru $a=1$ sistemul dat devine $\begin{cases}2x+y+z=1\\3x+y+z=1\\-2x+y+z=1\end{cases}$

Matricea asociată sistemului este $\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&1\\-2&1&1\end{pmatrix}$ și are rangul doi un determinant principal fiind $\begin{vmatrix}2&1\\3&1\end{vmatrix}=2-3=-1\neq 0$

Determinantul asociat sistemului este nul deoarece are două coloane egale (a doua și a treia).
Primele două ecuații sunt principale iar x și y sunt necunoscute principale.
Notăm $z=\alpha$ și păstrăm doar ecuațiile principale:

$\begin{cases}2x+y=1-\alpha\\3x+y=1-\alpha\end{cases}$

După rezolvare obținem soluția sistemului inițial $(0,1-\alpha,\alpha)$

$x_0^2=y_0\cdot z_0 \Leftrightarrow (1-\alpha)\alpha=0$ care are soluțiile $\alpha=1$ și $\alpha=0$.

Pentru $\alpha=1$ se obține soluția $(0,0,1)$

Pentru $\alpha=0$ se obține soluția $(0,1,0)$

2.a) $x*y=5xy-5x-5y+5+1=5x(y-1)-5(y-1)+1=(5x-5)(y-1)+1=5(x-1)(y-1)+1, \forall x,y\in\mathbb{R}$

b) Calculăm $x*x$ și $x*x*x$ folosind relația de la punctul a)

$x*x=5(x-1)(x-1)+1=5(x-1)^2+1$

$(x*x)*x=5\left[\left(5(x-1)^2+1\right)-1\right](x-1)+1=25(x-1)^3+1$

$x*x*x<26$ este echivalentă cu $25(x-1)^3+1<26$

Rezultă $(x-1)^3<1$

$x-1<1$ de unde $x\in(-\infty,2)$.

c) $x*y*z=25(x-1)(y-1)(z-1)+1, \forall x,y,z\in\mathbb{R}$

$$\frac{1}{n^2}*\frac{1}{(n+1)^2}*\frac{1}{(n+2)^2}=25\left(\frac{1}{n^2}-1\right)\left(\frac{1}{(n+1)^2}-1\right)\left(\frac{1}{(n+2)^2}-1\right)+1=25\frac{1-n^2}{n^2}\cdot\frac{1-(n+1)^2}{(n+1)^2}\cdot\frac{1-(n+2)^2}{(n+2)^2}+1=$$

$$=25\frac{(1-n)(1+n)}{n^2}\cdot\frac{(1-(n+1))(1+(n+1))}{(n+1)^2}\cdot\frac{(1-(n+2))(1+(n+2))}{(n+2)^2}+1=25\frac{(1-n)(n+3)}{n(n+2)}+1$$

Egalitatea din enunț devine:

$$25\frac{(1-n)(n+3)}{n(n+2)}+1=-19$$

$$\frac{(1-n)(n+3)}{n(n+2)}=-\frac{4}{5}$$

$$5(1-n)(n+3)=-4n(n+2)$$

$$5(-n^2-2n+3)=-4n^2-8n$$

Se obține $n^2+2n-15=0$

$\Delta=4+60=64$

$$n_1,n_2=\frac{-2\pm8}{2}$$

Se obține o singură soluție număr natural și anume $n=3$.

SUBIECTUL al III-lea –- Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x-2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este perpendiculară pe dreapta de ecuație $y=x$.
5p	**c)** Demonstrați că $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^3 f(x)dx=12$.
5p	**b)** Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.
5p	**c)** Demonstrați că există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f(t)}dt=x$.

Subiectul 3

1.a) $f'(x)=\left(\ln x-\frac{2(x-1)}{x}\right)'=(\ln x)'-\left(\frac{2(x-1)}{x}\right)'=\frac{1}{x}-\frac{(2(x-1))'\cdot x-2(x-1)\cdot x'}{x^2}=\frac{1}{x}-\frac{2x-2(x-1)}{x^2}=$

$=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}=\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}=\frac{x-2}{x^2}, x\in(0,+\infty)$

b) Dreapta de ecuație $y=x$ are panta $m=1$ (prima bisectoare).

Două drepte sunt perpendiculare dacă și numai dacă produsul pantelor este egal cu -1
Deducem că panta tangentei la grafic (care este perpendiculară pe dreapta $y = x$) este egală cu -1.
Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a, f(a))$ este perpendiculară pe dreapta de ecuație $y = x \Leftrightarrow f'(a) = -1$.

$$\frac{a-2}{a^2} = -1$$

$$a^2 + a - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

Se obțin soluțiile

$a_1 = -2 \notin (0, +\infty)$

și $a_2 = 1$ care convine.

c) $f'(x) < 0, \forall x \in (0,2)$ deci funcția este strict descrescătoare pe intervalul $(0,2)$.

$$1 < \frac{\pi}{2} < 2 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right) < f(1)$$

$f(1) = \ln 1 - \frac{2(1-1)}{1} = 0$ și deci $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$

2.a) $\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^3 (x^2+1)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_0^3 = \left(\frac{3^3}{3} + 3\right) - \left(\frac{0^3}{3} + 0\right) = \frac{27}{3} + 3 - 0 = 12$

b) $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ este pozitivă pe intervalul $[0,1]$.

$$A = \int_0^1 |g(x)|\,dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln(1^2+1) - \frac{1}{2}\ln(0^2+1) = \frac{1}{2}\ln 2$$

c) Considerăm funcția $h:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prin formula $h(x) = \int_0^x e^{f(t)}dt - x$

Funcția h este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și avem $h'(x) = \left(\int_0^x e^{f(t)}dt - x\right)' = \left(\int_0^x e^{f(t)}dt\right)' - x' = e^{f(x)} - 1 = e^{x^2+1} - 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$$e^{x^2+1} > e^1 > 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow h'(x) = e^{x^2+1} - 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Rezultă că funcția h este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ deci este injectivă.

$$h(0) = \int_0^0 e^{f(t)}dt - 0 = 0$$

Ecuația $h(x) = 0$ are soluția unică $x = 0$.

Rezultă că ecuația $\int_0^x e^{f(t)}dt = x$ are soluția unică $x = 0$.