Ministerul Educaţiei Naţionale
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

Examenul de bacalaureat naţional 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I – Scrieţi, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

5p	**1.** Arătaţi că numărul $N=(4+3i)^2+(3-4i)^2$ este natural, unde $i^2=-1$.
5p	**2.** Determinaţi numerele reale a, ştiind că punctul $A(a,a)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2-x^2$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^x+5^{x+1}=30$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $M=\left\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots,\sqrt{49}\right\}$, acesta să fie număr natural.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5)$, $B(3,5)$ şi $C(2,1)$. Determinaţi lungimea medianei din B a triunghiului ABC.
5p	**6.** Demonstraţi că $(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2=2$, pentru orice număr real x.

Soluții

Subiectul1

1. Folosim formulele de calcul prescurtat $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ și $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$(4+3i)^2=16+24i+9i^2$

$(3-4i)^2=9-24i+16i^2$

$(4+3i)^2+(3-4i)^2=16+24i+9i^2+9-24i+16i^2=16+9\cdot(-1)+9+16\cdot(-1)=16-9+9-16=0\in N$

2. In general un punct $A(a,b)$ aparține graficului unei funcții f dacă și numai dacă $f(a)=b$.

În exercițiul nostru punem condiția $f(a)=a$

$$\left.\begin{array}{l} f(a)=2-a^2 \\ f(a)=a \end{array}\right\}\Rightarrow 2-a^2=a$$

Se obține ecuația $a^2+a-2=0$ care are soluțiile $a_1=1$ și $a_2=-2$.

3. $5^x+5^x\cdot 5^1=30$

Notăm $5^x=y$ și obținem ecuația în necunoscuta y

$y+5y=30$ care are soluția $y=5$.

Revenim la notația făcută:

$5^x=5\Rightarrow x=1$.

4. Probabilitatea unui eveniment se calculează cu formula $P=\dfrac{numarcazurifavorabile}{numarcazuriposibile}$.

Mulțimea M are 49 de elemente deci avem 49 de cazuri posibile.

Numerele naturale din mulțimea M sunt $\sqrt{1},\sqrt{4},\sqrt{9},\sqrt{16},\sqrt{25},\sqrt{36},\sqrt{49}$ deci avem 7 cazuri favorabile.

$P=\frac{7}{49}=\frac{1}{7}$.

5. Aflăm coordonatele mijlocului M al segmentului AC.

$M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)\Rightarrow M\left(\frac{2+2}{2},\frac{5+1}{2}\right)\Rightarrow M(2,3)$

Calculăm lungimea medianei BM cu formula $BM=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Obținem $BM=\sqrt{(3-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

6. $(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=$

$=2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=2\cdot 1=2,\forall x\in R$.

S-a folosit mai sus formula fundamentală a trigonometriei $\sin^2 x+\cos^2 x=1,\forall x\in R$

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x,y)=\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1,1))=2$.

5p **b)** Determinați numărul natural n pentru care $A(n-1,0)+A(n+1,0)=A(2018,0)$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că există un număr real x pentru care $A(x,1)\cdot A(x,1)=A(a,-2)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-7X^2+mX-8$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(-1)+f(1)=-30$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la X^2-3X+1, știind că f se divide cu $X-2$.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care polinomul f are trei rădăcini reale pozitive, în progresie geometrică.

Subiectul 2

1.a) $A(1,1)=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\det(A(1,1))=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot 1-1\cdot(-1)=1+1=2$

b) $A(n-1,0)+A(n+1,0)=\begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 0 & n-1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} n+1 & 0 \\ 0 & n+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2n & 0 \\ 0 & 2n \end{pmatrix}$

$A(2018,0)=\begin{pmatrix} 2018 & 0 \\ 0 & 2018 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow\begin{pmatrix} 2n & 0 \\ 0 & 2n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2018 & 0 \\ 0 & 2018 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow 2n=2018$

$\Rightarrow n=1009$

c) $A(x,1)\cdot A(x,1)=\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2-1 & -2x \\ 2x & x^2-1 \end{pmatrix}$

$A(a,-2)=\begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & a \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x^2-1 & -2x \\ 2x & x^2-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & a \end{pmatrix}$

Din $-2x=2$ rezultă $x=-1$.

Din $x^2-1=a$ rezultă $a=0$.

2.a) $f(-1)=(-1)^3-7\cdot(-1)^2+m\cdot(-1)-8=-1-7-m-8=-m-16$

$f(-1)=1^3-7\cdot1^2+m\cdot1-8=1-7+m-8=m-14$

$f(-1)+f(1)=-m-16+m-14=-30, \forall m\in R$

b) Din faptul că polinomul f se divide cu $X-2$ deducem că $f(2)=0$

$f(2)=2^3-7\cdot2^2+m\cdot2-8=8-28+2m-8=2m-28$

$2m-28=0$

$2m=28$

$m=14$

$f=X^3-7X^2+14X-8$

$$\begin{array}{r|l}
X^3-7X^2+14X-8 & X^2-3X+1 \\ \cline{2-2}
-X^3+3X^2-X & \\ \cline{1-1}
 & X-4 \\
-4X^2+13X-8 & \\
4X^2-12X+4 & \\ \hline
X-4 &
\end{array}$$

Câtul este $X-4$ și restul este $X-4$.

c) Fie x_1,x_2,x_3 rădăcinile reale pozitive, în progresie geometrică ale polinomului f.

$\Rightarrow x_1\cdot x_3=x_2^2$

Din relațiile lui Viete obținem

$x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a}=-\dfrac{-8}{1}=8$

$\Rightarrow x_2^3=8\Rightarrow x_2=2$

$f(2)=0\Rightarrow 8-28+2m-8=0\Rightarrow m=14$ (condiție necesară).

Pentru $m=14$ polinomul f se poate scrie $f=(X-1)(X-2)(X-4)$.

Pentru $m=14$ (condiție suficientă) rădăcinile polinomului sunt 1, 2 și 4 și sunt în progresie geometrică de rație 2.

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x+2}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că funcţia f este convexă pe $(-2,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$.

5p **a)** Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(1)=0$.

5p **b)** Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ este egal cu $\dfrac{97\pi}{10}$.

5p **c)** Determinaţi numărul $m\in(1,+\infty)$, ştiind că $\displaystyle\int_1^m\left(f(x)-x^2\right)\ln x\,dx=\frac{1}{2}$.

<u>Subiectul 3</u>

1.a)

$$f'(x)=\left(\frac{x^2+2x+1}{x+2}\right)'=\frac{\left(x^2+2x+1\right)'(x+2)-\left(x^2+2x+1\right)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{(2x+2)(x+2)-\left(x^2+2x+1\right)}{(x+2)^2}=$$

$$=\frac{2x^2+4x+2x+4-x^2-2x-1}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}=\frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2},\forall x\in(-2,+\infty)$$

b) Ecuația asimptotei oblice este $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2+2x+1}{x+2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x+1}{x+2}\cdot\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+2x+1\right)'}{\left(x^2+2x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+2}{2x+2}=1$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x+1}{x+2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x+1-x^2-2x}{x+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+2}\right)=\frac{1}{+\infty}=0$$

Ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției este $y=x$ (prima bisectoare).

c) $$f''(x)=\left(\frac{x^2+4x+3}{(x+2)^2}\right)'=\frac{\left(x^2+4x+3\right)'(x+2)^2-\left(x^2+4x+3\right)\left[(x+2)^2\right]'}{\left((x+2)^2\right)^2}=$$

$$=\frac{(2x+4)(x+2)^2-\left(x^2+4x+3\right)2(x+2)}{(x+2)^4}=\frac{2(x+2)\left[(x+2)^2-\left(x^2+4x+3\right)\right]}{(x+2)^4}=\frac{2\left[x^2+4x+4-x^2-4x-3\right]}{(x+2)^3}=$$

$$=\frac{2}{(x+2)^3},x\in(-2,+\infty)$$

$f''(x)>0$ pentru $\forall x\in(-2,+\infty)$ deci funcția este convexă pe intervalul $(-2,+\infty)$.

2.a) Mulțimea primitivelor funcției f este $\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = \int\left(x^2+\frac{1}{x}\right)dx = \frac{x^3}{3}+\ln x + C$$

O primitivă oarecare a funcției f este $F(x)=\frac{x^3}{3}+\ln x + c$, $c\in R$.

Aflăm c din condiția $F(1)=0$

$$F(1)=\frac{1}{3}+\ln 1 + c = \frac{1}{3}+c$$

$$\frac{1}{3}+c=0 \Rightarrow c=-\frac{1}{3}$$

Primitive cerută este $F:(0,+\infty)\to R$ prin formula $F(x)=\frac{x^3}{3}+\ln x-\frac{1}{3}$

b) $V=\pi\int_1^2 g^2(x)dx=\pi\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^2dx=\pi\int_1^2\left(x^4+2x+\frac{1}{x^2}\right)dx=\pi\left(\frac{x^5}{5}+x^2-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^2=$

$$=\pi\left(\frac{2^5}{5}+2^2-\frac{1}{2}\right)-\pi\left(\frac{1^5}{5}+1^2-\frac{1}{1}\right)=\pi\left(\frac{32}{5}+4-\frac{1}{2}\right)-\pi\left(\frac{1}{5}\right)=\pi\left(\frac{32}{5}+4-\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)=\pi\frac{64+40-5-2}{10}=\frac{97\pi}{10}$$

c) $\int_1^m\left(f(x)-x^2\right)\ln x dx=\int_1^m\left(x^2+\frac{1}{x}-x^2\right)\ln x dx=\int_1^m\frac{1}{x}\ln x dx=\int_1^m(\ln x)'\ln x dx=\frac{\ln^2 x}{2}\Bigg|_1^m=$

$$=\frac{\ln^2 m}{2}-\frac{\ln^2 1}{2}=\frac{\ln^2 m}{2}$$

$$\frac{\ln^2 m}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow \ln m=\pm 1$$

$$\ln m=-1\Rightarrow m=\frac{1}{e}\notin(1,+\infty)$$

$$\ln m=1\Rightarrow m=e\in(1,+\infty)$$