Ministerul Educației Naționale
Centrul Național de Evaluare și Examinare

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge 1}$ este egală cu 30. Determinați a_2.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+9$. Arătați că $(f\circ f)(3)=9$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x-6)=6-\log_2(x+6)$.
5p	**4.** Determinați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{0,1,2,3,4,5\}$.
5p	**5.** Se consideră triunghiul ABC, punctul D mijlocul laturii AC și punctul E mijlocul segmentului BD. Arătați că $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=2\sqrt{3}$, $A=\frac{\pi}{4}$ și $B=\frac{5\pi}{12}$. Determinați raza cercului circumscris triunghiului ABC.

Soluții

Subiectul1

1. $\frac{a_1+a_3}{2}=a_2\Rightarrow a_1+a_3=2a_2$

$a_1+a_2+a_3=30\Rightarrow 3a_2=30\Rightarrow a_2=10$

2. $f(3)=0$

$(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(0)=9$

3. Condiții de existență:

$$\begin{cases}x-6>0\\ x+6>0\end{cases}$$

Ecuația dată devine:

$\log_2(x-6)+\log_2(x+6)=6$

$\log_2(x-6)(x+6)=6$

$x^2-36=2^6$

$x^2=100$

$x=10$ convine

$x=-10$ nu convine

4. $A_6^2-A_5^1=30-5=25$ sau

Soluția din barem:

Cifra zecilor, fiind nenulă, se poate alege în 5 moduri.

Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în câte 5 moduri, deci se pot forma $5\cdot 5=25$

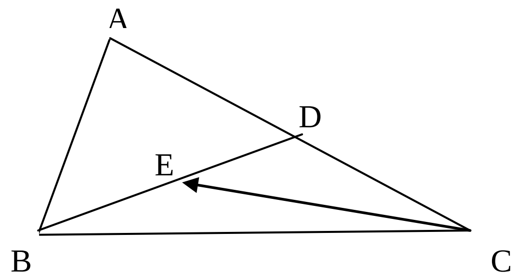
de numere.

5. Pentru rezolvare folosim următoarea proprietate:

Dacă avem în plan punctele O,A,B și M mijlocul segmentului AB atunci avem egalitatea vectorială:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$$

Revenim la problema noastră:



Aplicăm proprietatea de mai sus și avem:

$\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Am folosit mai sus și egalitățile $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ și $\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{BC}$.

6. $C=\pi-A-B=\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{3}$ deci $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Aplicăm teorema sinusurilor în triunghiul ABC și obținem $\frac{AB}{\sin C}=2R$

$\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R\Rightarrow 2R=4\Rightarrow R=2$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 2 & 1\\ a & 4 & 1\\ 1 & -1 & a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+2y+z=4\\ ax+4y+z=6\\ x-y+az=1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=0$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care matricea $A(a)$ are rangul 2.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-\frac{1}{2}(x+y)+\frac{3}{4}$. Legea de compoziție este asociativă și are elementul neutru $e=\frac{3}{2}$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale nenule x pentru care $\frac{1}{x}*x*\frac{1}{x}=x*\frac{1}{x}*x$.

5p **c)** Arătați că **nu** există numere întregi x și y, astfel încât x să fie simetricul lui y în raport cu legea de compoziție „$*$”.

Subiectul 2

1.a) $A(1)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$

$\det\left(A(1)\right)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=0$ deoarece are două coloane egale.

b) Matricea $A(a)$ are minorul $\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-2\neq 0$ deci $rang\left(A(a)\right)\geq 2$.

Matricea $A(a)$ are rangul 2 dacă și numai dacă $\det\left(A(a)\right)=0$.

$\det\left(A(a)\right)=\begin{vmatrix}a & 2 & 1\\ a & 4 & 1\\ 1 & -1 & a\end{vmatrix}=4a^2-a+2-4+a-2a^2=2a^2-2$

$2a^2-2=0$ cu soluțiile $a=1$ și $a=-1$.

c) Sistemul dat are soluție unică dacă și numai dacă $\det\left(A(a)\right)\neq 0\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

In acest caz soluția sistemului se află cu formulele lui Cramer:

$$\begin{cases} x=\dfrac{d_1}{\det\left(A(a)\right)}=\dfrac{4(a-1)}{2(a^2-1)}=\dfrac{2}{a+1}\\ y=\dfrac{d_2}{\det\left(A(a)\right)}=\dfrac{2(a^2-1)}{2(a^2-1)}=1\\ z=\dfrac{d_3}{\det\left(A(a)\right)}=\dfrac{4(a-1)}{2(a^2-1)}=\dfrac{2}{a+1}\end{cases}$$

$d_1=\begin{vmatrix}4 & 2 & 1\\ 6 & 4 & 1\\ 1 & -1 & a\end{vmatrix}=16a-6+2-4+4-12a=4a-4$

$d_2=\begin{vmatrix}a & 4 & 1\\ a & 6 & 1\\ 1 & 1 & a\end{vmatrix}=6a^2+a+4-6-a-4a^2=2a^2-2$

$d_3=\begin{vmatrix}a & 2 & 4\\ a & 4 & 6\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=4a-4a+12-16+6a-2a=4a-4$

Condiția din enunț devine $\left(\dfrac{2}{a+1}\right)^2+1+\left(\dfrac{2}{a+1}\right)^2=3$

$\left(\dfrac{2}{a+1}\right)^2=1\Rightarrow\dfrac{2}{a+1}=\pm 1$

Dacă $\dfrac{2}{a+1}=1\Rightarrow a+1=2\Rightarrow a=1$ care nu convine deoarece $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$

Dacă $\dfrac{2}{a+1}=-1\Rightarrow a+1=-2\Rightarrow a=-3$ care convine.

2.a) $x*y=xy-\frac{1}{2}(x+y)+\frac{3}{4}=xy-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=x\left(y-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2},\forall x,y\in\mathbb{R}$

b) Ecuația dată devine:

$$\left(\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)*\frac{1}{x}=\left(\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right)*x$$

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)-\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}-x\right)=0$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=0\Rightarrow x=2$$

$$x-\frac{1}{2}=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$\frac{1}{x}-x=0\Rightarrow x^2=1$ de unde obținem $x=1$ sau $x=-1$.

c) Presupunem că există x,y numere întregi astfel încât x să fie simetricul lui y.

$x*y=e$

$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)=1\Leftrightarrow\underbrace{(2x-1)}_{impar}\underbrace{(2y-1)}_{impar}=4$ imposibil deoarece produsul a două numere impare este număr impar.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-8x+8\ln x+12-8\ln 2$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(x-2)^2}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(3,3)$ și este paralelă cu tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Se consideră numerele reale a, b și c astfel încât punctul $M(a,b)$ este situat pe graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-8\ln 2+8\ln x$ și punctul $N(a,c)$ este situat pe graficul funcției $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=8x-12$. Demonstrați că $b\ge c$, pentru orice $a\in[2,+\infty)$.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1(x^2+4)f(x)dx=-\frac{11}{3}$.
5p	**b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este concavă pe $(-\infty,0]$.
5p	**c)** Pentru fiecare număr natural n, se consideră $I_n=\int_1^2 x^n f(x)dx$. Demonstrați că $\lim_{n\to+\infty}I_n=-\infty$.

<u>**Subiectul 3**</u>

1.a) $f'(x)=\left(x^2-8x+8\ln x+12-8\ln 2\right)'=2x-8+\dfrac{8}{x}=\dfrac{2x^2-8x+8}{x}=\dfrac{2\left(x^2-4x+4\right)}{x}=\dfrac{2(x-2)^2}{x},x\in(0,+\infty)$

b) Tangenta la graficul funcției în punctul de pe grafic de abscisă $x=2$, are panta $f'(2)$.

$f'(2)=\dfrac{2(2-2)^2}{2}=0$ (tangenta este axa Ox deoarece $B(2,0)\in G_f$).

Două drepte sunt paralele dacă și numai dacă au aceeași pantă.

Ecuația dreptei care trece prin punctul $A(3,3)$ și are panta $m=0$ se află cu formula $y-y_0=m(x-x_0)$

Ecuația dreptei este $y-3=0$.

c) $M(a,b)\in G_g\Rightarrow g(a)=b\Rightarrow a^2-8\ln 2+8\ln a=b$

$N(a,c)\in G_h\Rightarrow h(a)=c\Rightarrow 8a-12=c$

Prin scăderea celor două relații obținem:

$a^2-8\ln 2+8\ln a-8a+12=b-c$

$f(a)=b-c$ (*)

Tabelul de variație al funcției f este:

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	+ + + + + +		0	+ + + + + + +	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

Din tabel rezultă că $f(a)\geq 0,\forall a\geq 2$

Din relația (*) rezultă $b\geq c$ pentru orice $a\geq 2$.

2.a) $\int_0^1\left(x^2+4\right)f(x)dx=\int_0^1\left(x^2+4\right)\cdot\dfrac{x^2-4}{x^2+4}dx=\int_0^1\left(x^2-4\right)dx=\left.\left(\dfrac{x^3}{3}-4x\right)\right|_0^1=\dfrac{1}{3}-4=-\dfrac{11}{3}$

b) Fie F o primitivă a funcției f.

$F'(x)=f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+4},x\in\mathbb{R}$

$F''(x)=\left(\dfrac{x^2-4}{x^2+4}\right)'=\dfrac{\left(x^2-4\right)'\left(x^2+4\right)-\left(x^2-4\right)\left(x^2+4\right)'}{\left(x^2+4\right)^2}=\dfrac{2x\left(x^2+4\right)-\left(x^2-4\right)2x}{\left(x^2+4\right)^2}=\dfrac{2x^3+8x-2x^3+8x}{\left(x^2+4\right)^2}=\dfrac{16x}{\left(x^2+4\right)^2}$

$F''(x)=\dfrac{16x}{\left(x^2+4\right)^2}\leq 0$ pentru $x\in(-\infty,0]$ deci F este concavă pe intervalul $(-\infty,0]$.

c) Metoda 1 (din barem)

Dacă $x\in[1,2]$ rezultă $x^n\left(x^2-4\right)\leq 0$

Dacă $x\in[1,2]$ rezultă $x^2+4\leq 8\Rightarrow\dfrac{1}{x^2+4}\geq\dfrac{1}{8}$

$x^n\dfrac{x^2-4}{x^2+4}\leq\dfrac{1}{8}x^n\left(x^2-4\right)$ pentru $x\in[1,2]$

$x^n f(x)\leq\dfrac{1}{8}x^n\left(x^2-4\right)$ pentru $x\in[1,2]$

$\Rightarrow I_n=\int_1^2 x^n f(x)dx\leq\int_1^2\dfrac{1}{8}x^n\left(x^2-4\right)dx=\dfrac{1}{8}\int_1^2\left(x^{n+2}-4x^n\right)dx=\dfrac{1}{8}\left.\left(\dfrac{x^{n+3}}{n+3}-4\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right)\right|_1^2=$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{2^{n+3}}{n+3}-4\frac{2^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{n+3}+\frac{4}{n+1}\right)=\frac{1}{8}\left(\frac{(n+1)2^{n+3}-4(n+3)2^{n+1}}{(n+1)(n+3)}-\frac{1}{n+3}+\frac{4}{n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{-2^{n+4}}{(n+1)(n+3)}-\frac{1}{n+3}+\frac{4}{n+1}\right)$$

Cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^{n+4}}{(n+1)(n+3)}=+\infty$ rezultă că $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=-\infty$

Metoda 2. Se mai poate folosi inegalitatea $\frac{x^2-4}{x^2+4}\le\frac{x-2}{2}$ (temă) pentru $x\in[1,2]$.

$x^n\frac{x^2-4}{x^2+4}\le x^n\frac{x-2}{2}$ pentru $x\in[1,2]$

$x^n f(x)\le x^n\frac{x-2}{2}$ pentru $x\in[1,2]$

$$\Rightarrow I_n=\int_1^2 x^n f(x)\,dx\le\int_1^2 x^n\frac{x-2}{2}dx=\frac{1}{2}\int_1^2\left(x^{n+1}-2x^n\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^{n+2}}{n+2}-2\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2^{n+2}}{n+2}-2\frac{2^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{2}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{(n+1)2^{n+2}-(n+2)2^{n+2}}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{n+2}+\frac{2}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{-2^{n+2}}{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{n+2}+\frac{2}{n+1}\right)$$

Cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^{n+2}}{(n+1)(n+2)}=+\infty$ rezultă că $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=-\infty$