Ministerul Educaţiei şi Cercetării
Centrul Naţional de Politici şi Evaluare în Educaţie

Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătaţi că numerele $\log_2 3$, $\log_2 6$ şi $\log_2 12$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
5p	**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+1$. Determinaţi numărul real x pentru care $f(x)=x$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lvert 2x-1\rvert=2x+1$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor pară şi cifra unităţilor impară.
5p	**5.** Determinaţi numărul real a, pentru care vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+\vec{j}$ şi $\vec{v}=8\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.
5p	**6.** În triunghiul ABC dreptunghic în A, $BC=12$ şi $B=\frac{\pi}{6}$. Arătaţi că aria triunghiului ABC este egală cu $18\sqrt{3}$.

Soluţii

Subiectul1

1. Trei numere reale a,b,c sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice dacă şi numai dacă $\frac{a+c}{2}=b$.

$$\frac{\log_2 3+\log_2 12}{2}=\frac{\log_2 36}{2}=\frac{\log_2 6^2}{2}=\frac{2\log_2 6}{2}=\log_2 6 \text{ c.c.t.d.}$$

2. $f(x)=x \Leftrightarrow x^2-x+1=x \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0$

Se obţine $x=0$.

3. $2x-1=2x+1$ imposibil

sau

$2x-1=-(2x+1) \Leftrightarrow 4x=0$ de unde obţinem $x=0$.

4. $P=\frac{numar\_cazuri\_favorabile}{numar\_cazuri\_posibile}$

Numerele naturale de doua cifre sunt $\{10,11,12,...,99\}$. In total sunt 90 de numere naturale de două cifre deci sunt 90 de cazuri posibile.

$\overline{ab}$

a este număr par deci poate lua valorile 2,4,6,8

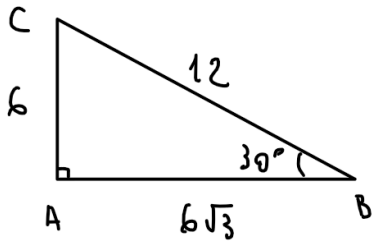
b este impar deci poate lua valorile 1,3,5,7,9.

In total $\overline{ab}$ poate lua $4\cdot 5=20$ de valori deci sunt 20 de cazuri favorabile.

Rezultă $P=\frac{20}{90}=\frac{2}{9}$.

5. Vectorii dați sunt coliniari dacă $\frac{a}{8}=\frac{1}{2}$ de unde rezultă $a=4$.

6.



Intr-un triunghi dreptunghic, cateta care se opune unghiului de 30^0 este egală cu jumătate din ipotenuză.

$\Rightarrow AC=\frac{BC}{2}=6$

$AB^2+AC^2=BC^2$

$AB^2+36=144$

$AB^2=108$

$AB=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$

Aria triunghiului ABC este $Aria_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{6\cdot 6\sqrt{3}}{2}=18\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2a-1 & 4a-4\\ 1-a & 3-2a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)\cdot A(b)=A(a+b-1)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați numărul natural n, știind că $A(1)\cdot A(2)\cdot A(2^2)\cdot A(2^3)\cdot A(2^4)=A(32)\cdot A(-n)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=3x^2-5xy+2y^2$.

5p **a)** Arătați că $1\circ 2=1$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ x=0$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $2^x\circ 3^x=0$.

Subiectul 2

1.a) $A(2)=\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & -1\end{pmatrix}$

$\det(A(2))=\begin{vmatrix}3 & 4\\ -1 & -1\end{vmatrix}=3\cdot(-1)-4\cdot(-1)=-3+4=1$

b) $A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}2a-1 & 4a-4\\ 1-a & 3-2a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2b-1 & 4b-4\\ 1-b & 3-2b\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}(2a-1)(2b-1)+(4a-4)(1-b) & (2a-1)(4b-4)+(4a-4)(3-2b)\\ (1-a)(2b-1)+(3-2a)(1-b) & (1-a)(4b-4)+(3-2a)(3-2b)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+2b-3 & 4a+4b-8\\ -a-b+2 & -2a-2b+5\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 2(a+b-1)-1 & 4(a+b-1)-4 \\ 1-(a+b-1) & 3-2(a+b-1) \end{pmatrix} = A(a+b-1)$ pentru orice numere reale a și b.

c)

$A(1)\cdot A(2) = A(1+2-1) = A(2)$

$A(2)\cdot A(4) = A(2+4-1) = A(5)$

$A(5)\cdot A(8) = A(5+8-1) = A(12)$

$A(12)\cdot A(16) = A(12+16-1) = A(27)$

$A(32)\cdot A(-n) = A(32-n-1) = A(31-n)$

Obținem

$A(27) = A(31-n)$ de unde rezultă $n=4$.

2.a) $1\circ 2 = 3\cdot 1^2 - 5\cdot 1\cdot 2 + 2\cdot 2^2 = 3-10+8 = 1$

b) $x\circ x = 3x^2 - 5x^2 + 2x^2 = 0, \forall x\in\mathbb{R}$

c) Să observăm că legea de compoziție dată se mai poate scrie astfel:

$x\circ y = 3x^2 - 3xy - 2xy + 2y^2 = 3x(x-y) - 2y(x-y) = (x-y)(3x-2y)$

$2^x \circ 3^x = (2^x - 3^x)(3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x)$

Obține ecuația $(2^x - 3^x)(3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x) = 0$

$2^x - 3^x = 0$ cu soluția $x=0$

sau

$3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3}$ cu soluția $x=1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+2x+2} - x$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} - 1$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=-1$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $\sqrt{(x^2+1)^2 + 2(x^2+1) + 2} - \sqrt{4x^2+4x+2} \le (x-1)^2$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 \left(4 - f^2(x)\right)dx = \pi$.

5p **b)** Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$ are aria egală cu $2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

5p **c)** Arătaţi că $\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x}dx = \ln\left(\sqrt{34} - \sqrt{17} + 4\sqrt{2} - 4\right)$.

Subiectul 3

1.a) Vom folosi formula $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2+2x+2} - x\right)' = \left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)' - x' = \frac{\left(x^2+2x+2\right)'}{2\sqrt{x^2+2x+2}} - 1 = \frac{2(x+1)}{2\sqrt{x^2+2x+2}} - 1 = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} - 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

b) Ecuația tangentei la graficul unei funcții este dată de formula $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ unde $x_0 = -1$.

$y - f(-1) = f'(-1)(x+1)$

$f(-1) = \sqrt{1-2+2} - (-1) = 2$ și $f'(-1) = \frac{-1+1}{\sqrt{1-2+2}} - 1 = -1$.

Ecuația tangentei cerute este $y - 2 = -(x+1) \Leftrightarrow x + y - 1 = 0$.

c) Ecuația $f'(x) = 0$ nu are soluții deoarece $\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} - 1 = 0 \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{x^2+2x+2}$ de unde

$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2x + 2$ imposibil.

Cum f' are proprietatea lui Darboux rezultă că are semn constant pe **R** și cum $f'(-1) = -1 < 0$ rezultă că

$f'(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ deci f este descrescătoare pe **R**.

Din $(x-1)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ rezultă $x^2 + 1 \geq 2x, \forall x \in \mathbb{R}$ și cum f este descrescătoare rezultă că

$f\left(x^2+1\right) \leq f(2x), \forall x \in \mathbb{R}$. (*)

$f\left(x^2+1\right) = \sqrt{\left(x^2+1\right)^2 + 2\left(x^2+1\right) + 2} - \left(x^2+1\right)$

$f(2x) = \sqrt{4x^2+4x+2} - 2x$

Din relația (*) rezultă $\sqrt{\left(x^2+1\right)^2 + 2\left(x^2+1\right) + 2} - \left(x^2+1\right) \leq \sqrt{4x^2+4x+2} - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$

adică $\sqrt{\left(x^2+1\right)^2 + 2\left(x^2+1\right) + 2} - \sqrt{4x^2+4x+2} \leq (x-1)^2, \forall x \in \mathbb{R}$.

2.a) $\int_0^1 \left(4 - f^2(x)\right) dx = \int_0^1 \left(4 - \frac{4x^2}{x^2+1}\right) dx = \int_0^1 \left(\frac{4}{x^2+1}\right) dx = 4\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = 4\,arctgx\Big|_0^1 = 4\underbrace{arctg1}_{\frac{\pi}{4}} - 4\underbrace{arctg0}_{0} = 4\frac{\pi}{4} = \pi$

b) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} \geq 0, \forall x \in [0,1]$

$$Aria = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 \left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}} \left(x^2+1\right)' dx = \left.\frac{\left(x^2+1\right)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right|_0^1 = 2\sqrt{x^2+1}\Big|_0^1 = 2\sqrt{2} - 2 = 2\left(\sqrt{2}-1\right)$$

c) $f\left(x^2\right) = \frac{2x^2}{\sqrt{\left(x^2\right)^2+1}}$

$$\int_1^2 \frac{f\left(x^2\right)}{x} dx = \int_1^2 \frac{\frac{2x^2}{\sqrt{\left(x^2\right)^2+1}}}{x} dx = \int_1^2 \frac{2x}{\sqrt{\left(x^2\right)^2+1}} dx = \int_1^2 \frac{\left(x^2\right)'}{\sqrt{\left(x^2\right)^2+1}} dx = \ln\left(x^2 + \sqrt{\left(x^2\right)^2+1}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \ln\left(4+\sqrt{17}\right) - \ln\left(1+\sqrt{2}\right) = \ln\frac{4+\sqrt{17}}{1+\sqrt{2}} = \ln\left[\left(4+\sqrt{17}\right)\left(\sqrt{2}-1\right)\right] = \ln\left(\sqrt{34} - \sqrt{17} + 4\sqrt{2} - 4\right)$$