Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\left(0,25\cdot 10-\frac{1}{2}\right)\left(0,25\cdot 10+\frac{1}{2}\right)=6$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-ax+1$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că punctul $A(2,1)$ aparține graficului funcției f.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+2}+3^x=30$.
5p	**4.** Un obiect costă 500 de lei. Determinați prețul obiectului după o scumpire cu 20%.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$ și $B(8,3)$. Punctul M este mijlocul segmentului AB. Calculați distanța de la punctul M la punctul $O(0,0)$.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A, cu $AB=5$ și $AC=10$. Calculați aria triunghiului ABC.

Soluţii

Subiectul1

1. $0,25=\frac{25}{100}=\frac{1}{4}$

$$\left(\frac{1}{4}\cdot 10-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\cdot 10+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{10}{4}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{10}{4}+\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{2}\cdot\frac{6}{2}=2\cdot 3=6$$

Obs: Vezi si rezolvarea din barem!

2. In general, un punct $A(a,b)$ este pe graficul funcției f dacă $f(a)=b$.

$A(2,1)\in G_f \Leftrightarrow f(2)=1$

$f(2)=4-2a+1=5-2a$

Obținem $5-2a=1$ de unde $a=2$.

3. $3^x\cdot 3^2+3^x=30$

$3^x\left(3^2+1\right)=30$

$10\cdot 3^x=30$

$3^x=3\Rightarrow x=1$

4. Scumpirea este $\frac{20}{100}\cdot 500=20\cdot 5=100$

Prețul final al obiectului este $500+100=600$ lei.

5. Mijlocul unui segment este $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

Mijlocul segmentului AB este $M\left(\frac{0+8}{2},\frac{3+3}{2}\right)\Rightarrow M(4,3)$

Distanța OM se calculează cu formula $OM=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$OM=\sqrt{(4-0)^2+(3-0)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

6. $Aria_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{5\cdot 10}{2}=25$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Arătați că $\det A=-1$.
5p	**b)** Arătați că $A\cdot A-3A=I_2$.
5p	**c)** Se consideră matricea $X=\begin{pmatrix}1 & x\\ y & 1\end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale. Determinați numerele reale x și y pentru care $A\cdot X-X\cdot A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=4xy+x+y$.
5p	**a)** Arătați că $3\circ 2=29$.
5p	**b)** Demonstrați că $x\circ y=\frac{(4x+1)(4y+1)-1}{4}$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**c)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $x\circ x\le 2$.

<u>**Subiectul 2**</u>

1.a) $\det A=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1\cdot 2-1\cdot 3=2-3=-1$

b) $A\cdot A-3A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 9\\ 3 & 7\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 9\\ 3 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$

c) $A\cdot X-X\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x\\ y & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & x\\ y & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3y & x+3\\ 1+2y & x+2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x+1 & 3+2x\\ y+1 & 3y+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3y-x & -x\\ y & x-3y\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}3y-x & -x\\ y & x-3y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

$\begin{cases}3y-x=-2\\ -x=1\\ y=-1\\ x-3y=2\end{cases}$ de unde obținem $\begin{cases}x=-1\\ y=-1\end{cases}$

2.a) $3\circ 2=4\cdot 3\cdot 2+3+2=24+5=29$

b) $x\circ y=\frac{16xy+4x+4y}{4}=\frac{16xy+4x+4y+1-1}{4}=\frac{4x(4y+1)+(4y+1)-1}{4}=\frac{(4x+1)(4y+1)-1}{4}$ pentru $\forall x,y\in\mathbb{R}$

c) $x\circ x=4xx+x+x=4x^2+2x$

Obținem ecuația $4x^2+2x\le 2\Leftrightarrow 2x^2+x-1\le 0$

Ecuația atașată $2x^2+x-1=0$ are soluțiile $x_1=-1$ și $x_2=\frac{1}{2}$

Facem tabelul cu semnul expresiei de gradul doi

x	$-\infty$ -1 $\frac{1}{2}$ $+\infty$
$2x^2+x-1$	+ + + + + 0 - - - - -0 + + + + + + +

In final $x\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$.

Obs: Vezi si rezolvarea din barem!

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\frac{x}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=e^x+\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $\frac{2-e}{2e}\le f(x)\le\frac{2e+1}{2}$, pentru orice $x\in[-1,1]$.

2. Se consideră funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)\sqrt{x}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_1^2\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\frac{5}{2}$.

5p **b)** Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei Ox a graficului funcţiei $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$, este egal cu $\frac{17\pi}{12}$.

5p **c)** Determinaţi numărul real a, ştiind că $\int_1^e\frac{f(x)\sqrt{x}\ln x}{x+1}dx=\frac{e^2+a}{4}$.

<u>**Subiectul 3**</u>

1.a) $f'(x)=\left(e^x+\frac{x}{x^2+1}\right)'=\left(e^x\right)'+\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'=e^x+\frac{x'\left(x^2+1\right)-x\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=e^x+\frac{x^2+1-2x^2}{\left(x^2+1\right)^2}=e^x+\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$

pentru orice $x\in\mathbb{R}$

b) Pentru a afla ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f, calculăm $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(e^x+\frac{x}{x^2+1}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x+\frac{x}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x+\frac{1}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right)=e^{-\infty}+\frac{1}{-\infty(1+0)}=0+0=0$$

deci dreapta de ecuație $y=0$ (axa Ox) este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f.

c) Pentru orice $x\in[-1,1]$ avem $x^2\le1$ deci $1-x^2\ge0$

$f'(x)=\underbrace{e^x}_{+}+\underbrace{\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}}_{+}>0$ pentru orice $x\in[-1,1]$ deci funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[-1,1]$.

Rezultă că $f(-1)\le f(x)\le f(1),\forall x\in[-1,1]$

$f(-1)=e^{-1}+\frac{-1}{2}=\frac{1}{e}-\frac{1}{2}=\frac{2-e}{2e}$

$f(1)=e^1+\frac{1}{2}=e+\frac{1}{2}=\frac{2e+1}{2}$

$\Rightarrow\frac{2-e}{2e}\le f(x)\le\frac{2e+1}{2}$ pentru orice $x\in[-1,1]$.

2.a) $\int_1^2\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=\int_1^2\frac{(x+1)\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\int_1^2(x+1)dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_1^2=\left(\frac{2^2}{2}+2\right)-\left(\frac{1^2}{2}+1\right)=4-\frac{1}{2}-1=3-\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

b) $V=\pi\int_0^1 g^2(x)dx=\pi\int_0^1 x(x+1)^2dx=\pi\int_0^1 x\left(x^2+2x+1\right)dx=\pi\int_0^1\left(x^3+2x^2+x\right)dx=\pi\left(\frac{x^4}{4}+2\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1=$

$=\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)-0=\pi\left(\frac{3}{12}+\frac{8}{12}+\frac{6}{12}\right)=\frac{17\pi}{12}$

c) $\int_1^e\frac{f(x)\sqrt{x}\ln x}{x+1}dx=\int_1^e\frac{(x+1)\sqrt{x}\sqrt{x}\ln x}{x+1}dx=\int_1^e x\ln x dx=\int_1^e\left(\frac{x^2}{2}\right)'\ln x dx=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}(\ln x)'dx=$

$=\frac{e^2}{2}\ln e-\frac{1^2}{2}\ln 1-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^e xdx=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^e=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{2e^2-e^2+1}{4}=\frac{e^2+1}{4}$

Tinând cont de cerința din enunț rezultă $\frac{e^2+a}{4}=\frac{e^2+1}{4}$ de unde $a=1$.