Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$, știind că $a_2=7$ și $a_6=23$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x-5$. Determinați numărul real a pentru care punctul $A(a,3a)$ aparține graficului funcției f.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4 x+\log_4(3x)=\log_4 12$.
5p	**4.** Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de două cifre, $\sqrt{n}$ să fie număr natural par.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-3,2)$, $B(1,4)$ și $C(6,0)$. Determinați distanța dintre mijloacele segmentelor AB și OC.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $BC=16$ și măsura unghiului B egală cu $30°$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $32\sqrt{3}$.

Soluţii

Subiectul1

1. $a_2=a_1+r=7$

$a_6=a_1+5r=23$

Se formează sistemul de două ecuații cu două necunoscute:

$$\begin{cases}a_1+r=7\\ a_1+5r=23\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-a_1-r=-7\\ a_1+5r=23\end{cases}\Rightarrow 4r=16\Rightarrow r=4$$

Se înlocuiește rația aflată în prima ecuație din sistem și se obține:

$a_1+4=7$

$\Rightarrow a_1=3$

2. $A(a,3a)\in G_f \Leftrightarrow f(a)=3a$

$f(a)=8a-5$

Rezultă

$8a-5=3a$

$5a=5$

$a=1$

3. Punem condiție de existență $x>0$.

Ecuația dată devine:

$\log_4(3x^2)=\log_4 12$

$3x^2=12$

$x^2=4$

Obținem $x=-2$ care nu convine deoarece nu verifică condiția de existență și $x=2$ care convine.

4. Probabilitatea unui eveniment se calculează cu formula:

$$P=\frac{numar\_cazuri\_favorabile}{numar\_cazuri\_posibile}$$

Numerele naturale de două cifre sunt 10,11,12,…,99.

În total sunt $99-9=90$ numere naturale de două cifre deci avem 90 de cazuri posibile.

Cazurile favorabile sunt:

$n=16$ deoarece $\sqrt{n}=\sqrt{16}=4$ este număr par.

$n=36$ deoarece $\sqrt{n}=\sqrt{36}=6$ este număr par.

$n=64$ deoarece $\sqrt{n}=\sqrt{64}=8$ este număr par.

În total sunt 3 cazuri favorabile.

Rezultă $P=\frac{3}{90}=\frac{1}{30}$

5. Mijlocul unui segment este $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

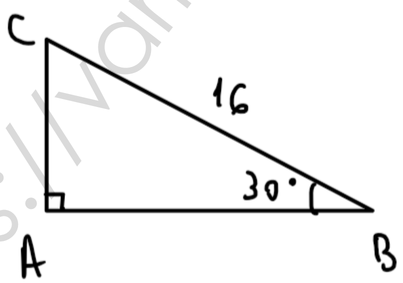
$\left.\begin{array}{l}A(-3,2)\\B(1,4)\end{array}\right|\Rightarrow M\left(\frac{-3+1}{2},\frac{2+4}{2}\right)\Rightarrow M(-1,3)$ unde M este mijlocul lui AB.

$\left.\begin{array}{l}O(0,0)\\C(6,0)\end{array}\right|\Rightarrow N\left(\frac{0+6}{2},\frac{0+0}{2}\right)\Rightarrow N(3,0)$ unde N este mijlocul lui OC.

Distanța dintre două puncte în plan se calculează cu formula $MN=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Obținem $MN=\sqrt{(3-(-1))^2+(0-3)^2}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

6.



Într-un triunghi dreptunghic cu un unghi de 30^0, cateta care se opune unghiului de 30^0 este egală cu jumătate din ipotenuză.

Rezultă $AC=\frac{BC}{2}=\frac{16}{2}=8$

Din teorema lui Pitagora aflăm și cealaltă catetă:

$AB^2+AC^2=BC^2$

$AB^2+8^2=16^2$

$AB^2=256-64$

$AB^2=192$

$AB=\sqrt{192}=8\sqrt{3}$

Aria este $A_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{8\cdot 8\sqrt{3}}{2}=32\sqrt{3}$

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}-3 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x+1 & -3\\ 2 & x-1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=9$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $B(3)\cdot B(4)=xB(1)$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care matricea $B(a)$ este inversa matricei $C=\frac{1}{9}A$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+X^2+mX-4$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=1$, arătați că $f(2)=10$.

5p **b)** Pentru $m=-4$, determinați rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr natural nenul m, polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

Subiectul 2

1.a) $\det A=\begin{vmatrix}-3 & 3\\ -2 & -1\end{vmatrix}=(-3)(-1)-(-2)\cdot 3=3+6=9$

b)

$B(3)=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}$

$B(4)=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

$B(1)=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 2 & 0\end{pmatrix}$

$B(3)\cdot B(4)=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & -3\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & -21\\ 14 & 0\end{pmatrix}=7\begin{pmatrix}2 & -3\\ 2 & 0\end{pmatrix}=7B(1)$

$\Rightarrow x=7$

c)

$B(a)\cdot C=\begin{pmatrix}a+1 & -3\\ 2 & a-1\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 3\\ -2 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-3a+3 & 3a+6\\ -2a-4 & -a+7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-3a+3}{9} & \frac{3a+6}{9}\\ \frac{-2a-4}{9} & \frac{-a+7}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-a+1}{3} & \frac{a+2}{3}\\ \frac{-2a-4}{9} & \frac{-a+7}{9}\end{pmatrix}$

$B(a)\cdot C=C\cdot B(a)=I_2$

$\begin{pmatrix}\frac{-a+1}{3} & \frac{a+2}{3}\\ \frac{-2a-4}{9} & \frac{-a+7}{9}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow a=-2$

2.a) $f(2)=2^3+2^2+2-4=8+4+2-4=10$

b) $f=X^3+X^2-4X-4=X^2(X+1)-4(X+1)=(X^2-4)(X+1)=(X-2)(X+2)(X+1)$

$(x-2)(x+2)(x+1)=0$

$x-2=0\Rightarrow x=2$

$x+2=0\Rightarrow x=-2$

$x+1=0\Rightarrow x=-1$

c) Scriem relațiile lui Viete:

$V_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -1$

$V_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} = m$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = V_1^2 - 2V_2 = 1 - 2m < 0, \forall m \in \mathbb{N}^*$ deci polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x+2}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{e^x}=0$.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este convexă.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^3\left(f(x)-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx=6$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^8\left(f(x)-x-1\right)dx=4$.

5p **c)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$, este egal cu $\pi\left(\frac{91}{3}+\ln 4\right)$.

<u>Subiectul 3</u>

1.a) $f'(x)=\left(\frac{x^2-2x+1}{x+2}\right)'=\frac{(x^2-2x+1)'(x+2)-(x^2-2x+1)(x+2)'}{(x+2)^2}=\frac{(2x-2)(x+2)-(x^2-2x+1)}{(x+2)^2}=$

$=\frac{2x^2+4x-2x-4-x^2+2x-1}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}, \forall x\in(-2,+\infty)$

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-2x+1)}{e^x(x+2)}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{L.H.}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2-2x+1)'}{\left[e^x(x+2)\right]'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-2}{e^x(x+3)}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{L.H.}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-2)'}{\left[e^x(x+3)\right]'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x(x+4)}=\frac{2}{+\infty}=0$$

c)

$$f''(x)=\left(\frac{x^2+4x-5}{(x+2)^2}\right)'=\frac{(x^2+4x-5)'(x+2)^2-(x^2+4x-5)\left((x+2)^2\right)'}{\left((x+2)^2\right)^2}=\frac{(2x+4)(x+2)^2-(x^2+4x-5)2(x+2)}{(x+2)^4}=$$

$$=\frac{(x+2)\left[(2x+4)(x+2)-2(x^2+4x-5)\right]}{(x+2)^4}=\frac{2x^2+4x+4x+8-2x^2-8x+10}{(x+2)^3}=\frac{18}{(x+2)^3}>0, \forall x\in(-2,+\infty)$$ deci

funcția f este convexă.

2.a) $\int_1^3\left(f(x)-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx=\int_1^3\left(x+1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx=\int_1^3(x+1)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_1^3=\left(\frac{3^2}{2}+3\right)-\left(\frac{1^2}{2}+1\right)=$

$=\frac{9}{2}+3-\frac{1}{2}-1=\frac{8}{2}+2=4+2=6$

b) $\int_0^8\left(f(x)-x-1\right)dx=\int_0^8\left(x+1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}-x-1\right)dx=\int_0^8\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx=\int_0^8(x+1)^{-\frac{1}{2}}(x+1)'\,dx=$

$=\frac{(x+1)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Bigg|_0^8=2\sqrt{x+1}\Big|_0^8=2\sqrt{8+1}-2\sqrt{0+1}=6-2=4$

c) $V=\pi\int_0^3 g^2(x)\,dx=\pi\int_0^3\left(x+1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)^2dx=\pi\int_0^3\left((x+1)^2+2(x+1)\frac{1}{\sqrt{x+1}}+\frac{1}{x+1}\right)dx=$

$=\pi\int_0^3\left((x+1)^2+2\sqrt{x+1}+\frac{1}{x+1}\right)(x+1)'\,dx=\pi\left(\frac{(x+1)^3}{3}+2\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\ln|x+1|\right)\Bigg|_0^3=$

$=\pi\left(\frac{(3+1)^3}{3}+2\frac{(3+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\ln|3+1|\right)-\pi\left(\frac{(0+1)^3}{3}+2\frac{(0+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\ln|0+1|\right)=\pi\left(\frac{64}{3}+4\frac{8}{3}+\ln 4\right)-\pi\left(\frac{1}{3}+4\frac{1}{3}\right)=$

$=\pi\left(\frac{64}{3}+\frac{32}{3}+\ln 4\right)-\pi\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\right)=\pi\left(\frac{64}{3}+\frac{32}{3}+\ln 4-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\right)=\pi\left(\frac{91}{3}+\ln 4\right)$