Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră numerele complexe $z_1=4+i$ și $z_2=2-4i$. Arătați că $i\cdot z_1+z_2=1$.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+5$. Determinați numerele reale a pentru care punctul $A(a,5)$ aparține graficului funcției f.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_6(7x-5)=\log_6(x+1)+\dfrac{1}{\log_x 6}$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu impar al lui 9.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,0)$, $B(2,4)$ și $C(5,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că dreptele OB și AC sunt paralele.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC, cu $AB=6$, $BC=10$ și $\cos B=\dfrac{4}{5}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 18.

Soluții

Subiectul1

1. $i\cdot z_1+z_2=i(4+i)+2-4i=4i+i^2+2-4i=-1+2=1$

În calculul de mai sus am ținut cont că $i^2=-1$

2. Obs: În general, punctul $A(a,b)$ este pe graficul funcției f dacă $f(a)=b$.

Punem condiția $f(a)=5$

$f(a)=a^2-3a+5$

$\Rightarrow a^2-3a+5=5$

$a^2-3a=0$

$a(a-3)=0$

de unde obținem $a=0$ sau $a=3$.

3. Punem condiții de existență:

$$\begin{cases}7x-5>0\\ x+1>0\\ x>0\\ x\neq 1\end{cases}$$

Ecuația dată devine:

$\log_6(7x-5)=\log_6(x+1)+\log_6 x$

$\log_6(7x-5)=\log_6 x(x+1)$

$7x-5=x(x+1)$

$x^2-6x+5=0$

Obținem $x=1$ care nu convine și $x=5$ care convine.

4. Probabilitatea unui eveniment se calculează cu formula $P=\dfrac{numar\_cazuri\_favorabile}{numar\_cazuri\_posibile}$

Numerele naturale de două cifre sunt 10,11,12,...,99.
În total sunt 90 de numere naturale de două cifre deci avem 90 de cazuri posibile.
În mulțimea numerelor naturale de două cifre, multiplii impari ai lui 9 sunt 27,45,63,81,99 deci avem 5 cazuri favorabile.

$P=\dfrac{5}{90}=\dfrac{1}{18}$.

5. Obs: Două drepte sunt paralele dacă și numai dacă au aceeași pantă.

Panta unei drepte se calculează cu formula $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$m_{OB}=\dfrac{4-0}{2-0}=2$

$m_{AC}=\dfrac{a-0}{5-2}=\dfrac{a}{3}$

$OB \parallel AC \Leftrightarrow m_{OB}=m_{AC}$

Rezultă că $\dfrac{a}{3}=2$ de unde obținem $a=6$.

6. Calculăm aria triunghiului ABC cu formula $A_{\Delta ABC}=\dfrac{AB\cdot BC\cdot \sin B}{2}$

Calculăm $\sin B$ cu formula fundamentală a trigonometriei.

$\sin^2 B+\cos^2 B=1$

$\sin^2 B+\left(\dfrac{4}{5}\right)^2=1$

$\sin^2 B+\dfrac{16}{25}=1$

$\sin^2 B=1-\dfrac{16}{25}$

$\sin^2 B=\dfrac{9}{25}$

și cum unghiul B este în intervalul $\left(0^0,180^0\right)$ rezultă că $\sin B=\dfrac{3}{5}$

$$A_{\Delta ABC}=\dfrac{AB\cdot BC\cdot \sin B}{2}=\dfrac{6\cdot 10\cdot \dfrac{3}{5}}{2}=30\cdot\dfrac{3}{5}=18$$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}1&x&0\\0&1&x\\-x&0&1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=1$.

5p **b)** Arătați că $A-B(x)\cdot A=xI_3$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $C(x)$ astfel încât $A\cdot C(x)=B(x)$. Arătați că $C(x)-C(y)=(y-x)A$, pentru orice numere reale x și y.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=x^2y+xy^2+x+y$.

5p **a)** Arătați că $1*3=16$.

5p **b)** Determinați numerele reale nenule x pentru care $x*\frac{2}{x}=9x$.

5p **c)** Determinați perechile (m,n) de numere întregi, cu $m\le n$, pentru care $m*n=1$.

<u>Subiectul 2</u>

1.a) $\det A=\begin{vmatrix}0&0&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{vmatrix}=0+1+0-0+0+0=1$

b) $B(x)\cdot A=\begin{pmatrix}1&x&0\\0&1&x\\-x&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x&0&1\\-1&-x&0\\0&-1&-x\end{pmatrix}$

$A-B(x)\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-x&0&1\\-1&-x&0\\0&-1&-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&0&0\\0&x&0\\0&0&x\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=x\cdot I_3$ pentru orice număr real x.

c) Matricea A este inversabilă deoarece $\det A=1\neq 0$

Din egalitatea $A\cdot C(x)=B(x)$ prin înmulțire la stânga cu A^{-1} obținem matricea $C(x)$.

$$A^{-1}\cdot A\cdot C(x)=A^{-1}\cdot B(x)$$

$$C(x)=A^{-1}\cdot B(x)$$

Pentru aflarea matricei A^{-1} parcurgem următoarele etape:

Etapa 1: $\det A=1\neq 0$ deci matricea A este inversabilă.

Etapa 2: Scriem matricea transpusă

$${}^tA=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

Etapa 3: Calculăm matricea adjunctă $A^*=\begin{pmatrix}\delta_{11}&\delta_{12}&\delta_{13}\\\delta_{21}&\delta_{22}&\delta_{23}\\\delta_{31}&\delta_{32}&\delta_{33}\end{pmatrix}$ unde $\delta_{ij}=(-1)^{i+j}d_{ij}$ sunt complemenții algebrici.

$\delta_{11}=(-1)^{1+1}d_{11}=\begin{vmatrix}0&-1\\0&0\end{vmatrix}=0$

$\delta_{12}=(-1)^{1+2}d_{12}=-\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1$

$\delta_{13}=(-1)^{1+3}d_{13}=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0$

$\delta_{21}=(-1)^{2+1}d_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$

$\delta_{22}=(-1)^{2+2}d_{22}=\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0$

$\delta_{23}=(-1)^{2+3}d_{23}=-\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1$

$\delta_{31}=(-1)^{3+1}d_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1$

$\delta_{32}=(-1)^{3+2}d_{32}=-\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=0$

$\delta_{33}=(-1)^{3+3}d_{33}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$

Rezultă că $A^*=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Etapa 4: Calculăm matricea inversă A^{-1} cu formula $A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot A^*$

Rezultă $A^{-1}=\frac{1}{1}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Mai departe avem $C(x)=A^{-1}\cdot B(x)=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 1 & x\\ -x & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1 & -x\\ x & 0 & -1\\ 1 & x & 0\end{pmatrix}$

$C(x)-C(y)=\begin{pmatrix}0 & -1 & -x\\ x & 0 & -1\\ 1 & x & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -1 & -y\\ y & 0 & -1\\ 1 & y & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & y-x\\ x-y & 0 & 0\\ 0 & x-y & 0\end{pmatrix}=(y-x)\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}=(y-x)A$, pentru orice numere reale x și y.

2.a) $1*3=1^2\cdot 3+1\cdot 3^2+1+3=3+9+1+3=16$

b) $x*\frac{2}{x}=x^2\frac{2}{x}+x\left(\frac{2}{x}\right)^2+x+\frac{2}{x}=2x+\frac{4}{x}+x+\frac{2}{x}=3x+\frac{6}{x}$ pentru orice număr real nenul x.

Ecuația dată în enunț devine $3x+\frac{6}{x}=9x$

$6x-\frac{6}{x}=0$

$\frac{6x^2-6}{x}=0$

$6x^2-6=0$

$6\left(x^2-1\right)=0$

Cu soluțiile $x=-1$ și $x=1$ care convin.

c) $m*n=m^2n+mn^2+m+n=mn(m+n)+m+n=(m+n)(mn+1)$

Obținem $\underbrace{(m+n)}_{\in\mathbb{Z}}\underbrace{(mn+1)}_{\in\mathbb{Z}}=1$

Sunt posibile următoarele cazuri:

Cazul 1

$\begin{cases} m+n=1 \\ mn+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+n=1 \\ mn=0 \end{cases}$ de unde obținem $\begin{cases} m=0 \\ n=1 \end{cases}$ care convine și $\begin{cases} m=1 \\ n=0 \end{cases}$ care nu convine.

Cazul 2

$\begin{cases} m+n=-1 \\ mn+1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+n=-1 \\ mn=-2 \end{cases}$

Din $mn=-2$ deducem că m și n au semne diferite iar din condiția $m\le n$ deducem că **m este negativ și n este pozitiv**.

Tot din $\begin{cases} m+n=-1 \\ mn=-2 \end{cases}$ cu m și n numere întregi rezultă că $\begin{cases} m=-2 \\ n=1 \end{cases}$ care convine.

În concluzie, perechile cerute în enunț sunt $\begin{cases} m=0 \\ n=1 \end{cases}$ și $\begin{cases} m=-2 \\ n=1 \end{cases}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^3}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{1-3\ln x}{x^4}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Determinați mulțimea numerelor reale m pentru care ecuația $f(x)=m$ are cel puțin o soluție.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x^2-1$.
5p	**a)** Arătați că $\int_1^4\left(f(x)-e^x\right)dx=18$.
5p	**b)** Arătați că $\int_1^2\dfrac{e^x}{f(x)-x^2}dx=\ln(e+1)$.
5p	**c)** Demonstrați că $\int_0^1\dfrac{x}{f(x)+1}dx\le 1-\dfrac{2}{e}$.

<u>**Subiectul 3**</u>

1.a) $f'(x)=\left(\dfrac{\ln x}{x^3}\right)'=\dfrac{(\ln x)'\cdot x^3-\ln x\cdot\left(x^3\right)'}{\left(x^3\right)^2}=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x^3-\ln x\cdot 3x^2}{x^6}=\dfrac{x^2-\ln x\cdot 3x^2}{x^6}=\dfrac{x^2(1-3\ln x)}{x^6}=\dfrac{1-3\ln x}{x^4}$ pentru orice număr $x\in(0,+\infty)$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{L.H.}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^3)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{3x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{3x^3}=\frac{1}{+\infty}=0$ deci dreapta de ecuație $y=0$ (adică axa Ox) este asimptotă orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c)

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-3\ln x}{x^4}=0$$

$$1-3\ln x=0\Leftrightarrow\ln x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}$$

$$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{\ln x}{x^3}=\frac{\ln(0+)}{0+}=\frac{-\infty}{0+}=-\infty$$

$$f\left(\sqrt[3]{e}\right)=\frac{\ln\sqrt[3]{e}}{\left(\sqrt[3]{e}\right)^3}=\frac{\frac{1}{3}}{e}=\frac{1}{3e}$$

Tabelul de variație al funcției este:

x	0		$\sqrt[3]{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		+ + + + + + +	0	- - - - - - - - - - -	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{3e}$	$\searrow$	0

Funcția dată este continuă pe tot domeniul de definiție.

Din tabelul de variație rezultă că ecuația $f(x)=m$ are cel puțin o soluție dacă $m\in\left(-\infty,\frac{1}{3e}\right]$

2.a) $\int_1^4\left(f(x)-e^x\right)dx=\int_1^4\left(e^x+x^2-1-e^x\right)dx=\int_1^4\left(x^2-1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_1^4=\left(\frac{4^3}{3}-4\right)-\left(\frac{1^3}{3}-1\right)=\frac{64}{3}-4-\frac{1}{3}+1=$

$=\frac{63}{3}-3=21-3=18$

b) $\int_1^2\frac{e^x}{f(x)-x^2}dx=\int_1^2\frac{e^x}{e^x+x^2-1-x^2}dx=\int_1^2\frac{e^x}{e^x-1}dx=\int_1^2\frac{\left(e^x-1\right)'}{e^x-1}dx=\ln\left|e^x-1\right|\Big|_1^2=\ln\left|e^2-1\right|-\ln\left|e-1\right|=\ln\frac{e^2-1}{e-1}=$

$=\ln\frac{(e-1)(e+1)}{e-1}=\ln(e+1)$

c) $\int_0^1\frac{x}{f(x)+1}dx=\int_0^1\frac{x}{e^x+x^2-1+1}dx=\int_0^1\frac{x}{e^x+x^2}dx\le\int_0^1\frac{x}{e^x}dx=\int_0^1xe^{-x}dx=\int_0^1x\left(-e^{-x}\right)'dx=$(metoda integrării prin părți)

$=-xe^{-x}\Big|_0^1-\int_0^1x'\left(-e^{-x}\right)dx=-\frac{1}{e}+\int_0^1e^{-x}dx=-\frac{1}{e}-e^{-x}\Big|_0^1=-\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{e}-1\right)=1-\frac{2}{e}$

S-a folosit mai sus inegalitatea $e^x+x^2\ge e^x$ pentru orice $x\in[0,1]$.