Ministerul Educaţiei Naţionale
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

Examenul de bacalaureat naţional 2013
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătaţi că $3\left(2-\sqrt{2}\right)+3\sqrt{2}=6$.
5p	**2.** Calculaţi $f(0)\cdot f(2)$ pentru funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x-2}=25$.
5p	**4.** Preţul unui obiect este 100 de lei. Determinaţi preţul obiectului după o scumpire cu 10%.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$ şi $B(1,3)$. Calculaţi distanţa de la punctul A la punctul B.
5p	**6.** Calculaţi $\cos 45^\circ+\cos 135^\circ$.

Soluţii

Subiectul1

1. $3\left(2-\sqrt{2}\right)+3\sqrt{2}=6-3\sqrt{2}+3\sqrt{2}=6$.

2. $f(0)=0-1=-1$

$f(2)=2-1=1$

$f(0)\cdot f(2)=-1\cdot 1=-1$.

3.Ecuaţia dată devine:

$5^{x-2}=5^2\Rightarrow x-2=2\Rightarrow x=4$.

4.Scumpirea este $\frac{10}{100}\cdot 100=10$ lei.

Preţul final al obiectului este 100+10=110 lei.

5.Se foloseşte formula $AB=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$.

In cazul nostru avem $AB=\sqrt{(1-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{4}=2$.

6. $\cos 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 135^0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 45^0+\cos 135^0=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Pentru fiecare număr real a se consideră matricea $M(a)=\begin{pmatrix}2a & 0\\ 0 & 2a\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Arătaţi că $M\left(\frac{1}{2}\right)+M\left(-\frac{1}{2}\right)=M(0)$.
5p	**b)** Determinaţi numărul real a pentru care $\det(M(a))=0$.
5p	**c)** Determinaţi matricea $M(-2)+M(-1)+M(0)+M(1)+M(2)$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3-2X^2+1$.
5p	**a)** Arătaţi că $f(1)=0$.
5p	**b)** Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $g=X^2-2X+1$.
5p	**c)** Calculaţi $x_1^2+x_2^2+x_3^2$, unde x_1,x_2,x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul 2

1.a) $M\left(\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}2\cdot\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 2\cdot\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I_2$

$M\left(-\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) & 0\\ 0 & 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-I_2$

$M(0)=\begin{pmatrix}2\cdot 0 & 0\\ 0 & 2\cdot 0\end{pmatrix}=O_2$

$M\left(\frac{1}{2}\right)+M\left(-\frac{1}{2}\right)=I_2-I_2=O_2=M(0)$.

b) $\det(M(a))=\begin{vmatrix}2a & 0\\ 0 & 2a\end{vmatrix}=4a^2$

$4a^2=0\Rightarrow a=0$.

c)Să observăm o proprietate a matricelor $M(a)$ şi anume:

$M(a)+M(-a)=\begin{pmatrix}2a & 0\\ 0 & 2a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2a & 0\\ 0 & -2a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=M(0),\forall a\in R$

Adunarea matricelor este operaţie comutativă deci suma dată in enunţ se mai poate scrie:

$(M(-2)+M(2))+(M(-1)+M(1))+M(0)=M(0)+M(0)+M(0)=3M(0)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

2.a) $f(1)=1^3-2\cdot 1^2+1=1-2+1=0$.

b)

$$\begin{array}{rl|l} & X^3-2X^2+1 & X^2-2X+1\\ - & X^3+2X^2-X & X\\ \hline & -X+1 & \end{array}$$

Câtul este X iar restul este $-X+1$.

c)Scriem relaţiile lui Viete

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-2}{1}=2 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{c}{a}=\dfrac{0}{1}=0 \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a}=-\dfrac{1}{1}=-1 \end{cases}$$

Folosim formula

$(x_1+x_2+x_3)^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$

$\Rightarrow 2^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2\cdot 0$

$\Rightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=4$

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}-1$.
5p	**a)** Arătaţi că $2\sqrt{x}f'(x)=1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Verificaţi dacă dreapta de ecuaţie $y=\frac{1}{4}x$ este tangentă la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=4$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Arătaţi că funcţia f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1+\frac{1}{x}$.
5p	**a)** Calculaţi $\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx$.
5p	**b)** Arătaţi că funcţia $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2+x+\ln x$ este o primitivă a funcţiei f.
5p	**c)** Calculaţi aria suprafeţei delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţie $x=1$ şi $x=2$.

<u>**Subiectul 3**</u>

1.a) $f'(x)=\left(\sqrt{x}-1\right)'=\left(\sqrt{x}\right)'-1'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}},\forall x\in(0,+\infty)$

$2\sqrt{x}\cdot f'(x)=2\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=1,\forall x\in(0,+\infty)$.

b) Ecuaţia tangentei la graficul unei funcţii in punctul de pe grafic de abscisă x_0 este dată de formula:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

In cazul nostru avem $y-f(4)=f'(4)(x-4)$

$f(4)=\sqrt{4}-1=1$

$f'(4)=\dfrac{1}{2\sqrt{4}}=\dfrac{1}{4}$

Ecuaţia tangentei la grafic in punctul de pe grafic de abscisă $x_0=4$ se găseşte astfel:

$y-1=\dfrac{1}{4}(x-4)$

$\Rightarrow y-1=\dfrac{1}{4}x-1\Rightarrow y=\dfrac{1}{4}x$

c) $f''(x)=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)'=\frac{1'\cdot 2\sqrt{x}-1\cdot\left(2\sqrt{x}\right)'}{\left(2\sqrt{x}\right)^2}=\frac{0\cdot 2\sqrt{x}-\frac{2}{2\sqrt{x}}}{4x}=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}<0,\forall x\in(0,+\infty)$ deci funcţia f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.

2.a) $\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^2\left(2x+1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^2(2x+1)dx=\left(x^2+x\right)\Big|_1^2=\left(2^2+2\right)-\left(1^2+1\right)=6-2=4$.

b) $F'(x)=\left(x^2+x+\ln x\right)'=2x+1+\frac{1}{x}=f(x),\forall x\in(0,+\infty)$ de unde rezultă că F este o primitivă a funcţiei f.

c)Funcţia f este funcţie pozitivă adică $f(x)>0,\forall x\in(0,+\infty)$

$Aria=\int_1^2\left|f(x)\right|dx=F(x)\Big|_1^2=\left(x^2+x+\ln x\right)\Big|_1^2=\left(2^2+2+\ln 2\right)-\left(1^2+1+\ln 1\right)=4+\ln 2$.