Ministerul Educaţiei Naţionale
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinaţi partea reală a numărului complex $z=1+2i+3i^2$.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x-5$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2-x}=3^{2x}$.

5p **4.** Determinaţi câte numere naturale pare, de două cifre, se pot forma cu cifrele 0, 1, 2 și 3.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}+2\vec{j}$ şi $\overrightarrow{AC}=(m+1)\vec{i}+4\vec{j}$, unde m este număr real. Determinaţi numărul real m ştiind că $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=AC=3$ şi $BC=3\sqrt{2}$. Determinați $\cos C$.

Soluţii

Subiectul1

1. $z=1+2i+3(-1)=-2+2i$

$\operatorname{Re} z=-2$

2.Se rezolvă ecuaţia $f(x)=g(x)$

$x-1=3x-5$

$x-3x=-5+1$

$-2x=-4$

$x=2$

$f(2)=g(2)=1$

Punctul de intersecţie al celor două grafice este $A(2,1)$.

3. $x^2-x=2x$

$x^2-3x=0$

$x(x-3)=0$

Se obţin soluţiile $x_1=0$ şi $x_2=3$.

4.Numerele naturale pare de două cifre care se termină in 0 sunt 10,20,30.
Numerele naturale pare de două cifre care se termină in 2 sunt 12,22,32.
In total sunt 6 numere pare de două cifre.

5. $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AB}$

$(m+1)\vec{i}+4\vec{j}=2(3\vec{i}+2\vec{j})$

$(m+1)\vec{i}+4\vec{j}=6\vec{i}+4\vec{j}$

$m+1=6$

$m=5$

6. $AB^2=9$

$AC^2 = 9$

$BC^2 = 18$

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

Conform reciprocei teoremei lui Pitagora rezultă că triunghiul dat este dreptunghic cu $m(A) = 90^0$.

$\cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 2x^2 - 2x & 4x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(0)) = 1$.

5p **b)** Arătaţi că $A(x+y) = A(x) \cdot A(y)$ pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x ştiind că $A(x^2+2) = A(x) \cdot A(x) \cdot A(x)$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + aX - 2$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $f(2) = 2(a-3)$.

5p **b)** Determinaţi numărul real a ştiind că polinomul f este divizibil prin $X^2 - X + 1$.

5p **c)** Pentru $a = 3$, rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $f(2^x) = 0$.

Subiectul 2

1.a) $\det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$

b) $A(x+y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+y & 1 & 0 \\ 2(x+y)^2 - 2(x+y) & 4(x+y) & 1 \end{pmatrix}$

$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ 2x^2 - 2x & 4x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & 1 & 0 \\ 2y^2 - 2y & 4y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+y & 1 & 0 \\ 2x^2 - 2x + 4xy + 2y^2 - 2y & 4x + 4y & 1 \end{pmatrix} =$

$= A(x+y), \forall x, y \in R$

c) Folosind punctul b) obţinem $A(x) \cdot A(x) = A(x+x) = A(2x)$

$A(x) \cdot A(x) \cdot A(x) = A(2x) \cdot A(x) = A(2x+x) = A(3x)$

Rezultă $A(x^2+2) = A(3x)$

$x^2 + 2 = 3x$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

Se obţin soluţiile $x_1 = 1$ şi $x_2 = 2$.

2.a) $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2a - 2 = 2a - 6 = 2(a-3)$

b) Se face împărţirea polinomului f la $X^2 - X + 1$

$$\begin{array}{l|l} X^3-3X^2+aX-2 & X^2-X+1 \\ \underline{-X^3+X^2-X} & \\ \quad -2X^2+(a-1)X-2 & X-2 \\ \quad \underline{2X^2-2X+2} & \\ \qquad (a-3)X & \end{array}$$

Punem condiţia ca restul obţinut să fie egal cu 0 de unde rezultă că $a=3$.

c)Pentru $a=3$ avem $f=X^3-3X^2+3X-2$.

Din punctul b) obţinem $X^3-3X^2+3X-2=\left(X^2-X+1\right)(X-2)$

Pentru a rezolva ecuaţia $f\left(2^x\right)=0$ facem notaţia $2^x=y$.

$f(y)=0\Rightarrow\left(y^2-y+1\right)(y-2)=0$

$y^2-y+1=0\Rightarrow\Delta=-3<0$ deci nu are soluţii reale.

$y-2=0\Rightarrow y=2\Rightarrow 2^x=2\Rightarrow x=1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{xe^x}{x+2}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{\left(x^2+2x+2\right)e^x}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=0$, situat pe graficul funcţiei f.

5p **c)** Arătaţi că ecuaţia $f(x)=1$ are cel puţin o soluţie în intervalul $(1,2)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}dx$.

5p **a)** Arătaţi că $I_1=1-\ln 2$.

5p **b)** Arătaţi că $I_{n+1}\le I_n$ pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstraţi că $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.

Subiectul 3

1.a) $f'(x)=\left(\dfrac{xe^x}{x+2}\right)'=\dfrac{\left(xe^x\right)'(x+2)-\left(xe^x\right)(x+2)'}{(x+2)^2}=\dfrac{\left(x'e^x+x\left(e^x\right)'\right)(x+2)-xe^x}{(x+2)^2}=\dfrac{\left(e^x+xe^x\right)(x+2)-xe^x}{(x+2)^2}=$

$=\dfrac{e^x(1+x)(x+2)-xe^x}{(x+2)^2}=\dfrac{e^x\left[(1+x)(x+2)-x\right]}{(x+2)^2}=\dfrac{\left(x^2+2x+2\right)e^x}{(x+2)^2},x\in(-2,+\infty)$

b)Ecuaţia tangentei la graficul unei funcţii in punctul de pe grafic de abscisă x_0 este dată de formula

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

In cazul nostru avem: $y-f(0)=f'(0)(x-0)$

$f(0)=0$

$f'(0)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

Se obţine ecuaţia tangentei $y=\frac{1}{2}x$.

c)Considerăm funcţia ajutătoare $g:[1,2]\to R, g(x)=f(x)-1$.

Funcţia g este continuă pe intervalul $[1,2]$.

$$g(1)=f(1)-1=\frac{e}{3}-1=\frac{e-3}{3}<0$$

$$g(2)=f(2)-1=\frac{2e^2}{4}-1=\frac{e^2}{2}-1=\frac{e^2-2}{2}>0$$

Rezultă că ecuaţia $g(x)=0$ are cel puţin o soluţie in intervalul $(1,2)$ deci ecuaţia $f(x)=1$ are cel puţin o soluţie in intervalul $(1,2)$.

Obs:Funcţia f este strict crescătoare pe $(-2,+\infty)$ deoarece are derivata pozitivă ,deci soluţia ecuaţiei $f(x)=1$ este unică pe intervalul $(1,2)$.

2.a) $I_1=\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=\int_0^1\frac{x+1-1}{1+x}dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x}\right)dx=\left(x-\ln(x+1)\right)\Big|_0^1=1-\ln 2$

b) $I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}}dx-\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}dx=\int_0^1\left(\frac{x^{n+1}}{1+x^{n+1}}-\frac{x^n}{1+x^n}\right)dx=\int_0^1 x^n\left(\frac{x}{1+x^{n+1}}-\frac{1}{1+x^n}\right)dx=$

$$=\int_0^1\frac{\overbrace{x^n}^{+}\overbrace{(x-1)}^{-}}{\underbrace{(1+x^{n+1})}_{+}\underbrace{(1+x^n)}_{+}}dx\le 0$$ de unde rezultă că $I_{n+1}-I_n\le 0\Rightarrow I_{n+1}\le I_n,\forall n\in N^*$

c)Pentru orice $x\in[0,1]$ şi orice $n\in N^*$ avem $0\le\frac{x^n}{1+x^n}\le x^n$.

$$0\le\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}dx\le\int_0^1 x^n dx$$

$$\Rightarrow 0\le\int_0^1\frac{x^n}{1+x^n}dx\le\frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow 0\le I_n\le\frac{1}{n+1},\forall n\in N^*$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to+\infty}I_n=0$$