Ministerul Educației și Cercetării Științifice
Centrul Național de Evaluare și Examinare

Examenul de bacalaureat național 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=2$ și $a_2=5$.
5p	**2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(3,5)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a-x$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $8^{4-x}=2^{2x+2}$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 0.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $M(1,1)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul M și are panta egală cu 2.
5p	**6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=5$, $AC=12$ și $BC=13$. Arătați că $\sin C=\frac{5}{13}$.

Soluții

Subiectul1

1. $r=a_2-a_1=5-2=3$

$a_3=a_2+r=5+3=8$

2.Punem condiția $f(3)=5$

$f(3)=a-3=5$

$a=8$

3. $\left(2^3\right)^{4-x}=2^{2x+2}$

$2^{12-3x}=2^{2x+2}$

$12-3x=2x+2$

$-5x=-10$

$x=2$

4.Numerele naturale de două cifre sunt 10,11,...,99.
In total sunt 99-9=90 astfel de numere deci sunt 90 de cazuri posibile.
Numerele 10,20,...,90 au produsul cifrelor egal cu 0 deci sunt 9 cazuri favorabile.

$P=\frac{numarcazurifavorabile}{numarcazuriposibile}=\frac{9}{90}=\frac{1}{10}$

5.Se folosește formula $y-y_0=m(x-x_0)$

$y-1=2(x-1)$

$y-1=2x-2$

$y=2x-1$

6.

$$\left.\begin{array}{l} BC^2=169 \\ AB^2=25 \\ AC^2=144 \end{array}\right\} \Rightarrow BC^2=AB^2+AC^2$$

Conform reciprocei teoremei lui Pitagora rezultă că triunghiul ABC este dreptunghic in A.

$$\sin C=\frac{cateta.opusa}{ipotenuza}=\frac{AB}{BC}=\frac{5}{13}$$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 1-x & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1+2x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=2$.

5p **b)** Arătați că $A(x)A(y)=A(xy+x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x, știind că $A(x)A(x)A(x)=A(7)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+2X^2+X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $f(0)=m$.

5p **b)** Pentru $m=1$, arătați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=5x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinaţi numărul natural prim m, știind că polinomul f are o rădăcină întreagă.

Subiectul 2

1.a) $A(1)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\det(A(1))=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}=0+0+0+2-0-0=2$$

b) $$A(x)A(y)=\begin{pmatrix} 1-x & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 0 \\ -x & 0 & 1+2x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-y & 0 & 2y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1+2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (1-x)(1-y)-2xy & 0 & (1-x)2y+2x(1+2y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -x(1-y)-y(1+2x) & 0 & (1+2x)(1+2y)-2xy \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1-(xy+x+y) & 0 & 2(xy+x+y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -(xy+x+y) & 0 & 1+2(xy+x+y) \end{pmatrix}=A(xy+x+y), \forall x,y\in R$$

c) $A(x)A(x)=A(x^2+2x)=A\left((x+1)^2-1\right)$

$$A(x)A(x)A(x)=A\left((x+1)^2-1\right)A(x)=A\left(x\left((x+1)^2-1\right)+(x+1)^2-1+x\right)=A\left((x+1)^3-1\right), \forall x\in R$$

Se obţine ecuaţia $(x+1)^3-1=7$

$(x+1)^3=8 \Rightarrow x+1=2$

$x=1$

2.a) $f(0)=0^3+2\cdot 0^2+0+m=m$

b)Din relaţiile lui Viete avem:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{2}{1}=-2 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\dfrac{c}{a}=\dfrac{1}{1}=1 \\ x_1x_2x_3=-\dfrac{d}{a}=-\dfrac{1}{1}=-1 \end{cases}$$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=(-2)^2-2\cdot 1=2$

Deoarece x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f rezultă:

$x_1^3+2x_1^2+x_1+1=0$

$x_2^3+2x_2^2+x_2+1=0$

$x_3^3+2x_3^2+x_3+1=0$

Prin adunarea celor trei relaţii rezultă:

$x_1^3+x_2^3+x_3^3+2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+x_1+x_2+x_3+3=0$

$x_1^3+x_2^3+x_3^3+2\cdot 2-2+3=0$

$x_1^3+x_2^3+x_3^3=-5=5x_1x_2x_3$

c)Fie $x_1\in Z$ acea rădăcină intreagă a polinomului f.

$x_1^3+2x_1^2+x_1+m=0$

$x_1(x_1^2+2x_1+1)+m=0$

$m=-x_1(x_1+1)^2$

Cum m este număr prim obţinem că $x_1+1=\pm 1$

Dacă $x_1=0$ rezultă $m=0$ care nu este număr prim deci acest caz nu convine.

Dacă $x_1=-2$ rezultă $m=2$ care este soluţia cerinţei din exerciţiu.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
5p	**c)** Arătaţi că derivata funcţiei f este descrescătoare pe $\mathbb{R}$.
	2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_1^e \frac{1}{x}dx=1$.
5p	**b)** Calculaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=e$.
5p	**c)** Determinaţi numărul natural nenul n, ştiind că $\int_1^e \frac{1}{x}(f(x))^n dx=\frac{1}{2015}$.

Subiectul 3

1.a) Se folosesc formulele $(f-g)'=f'-g'$ şi $\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

In cazul nostru avem:

$$f'(x)=\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)'=x'-\left(\sqrt{x^2+1}\right)'=1-\frac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2+1}}=1-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}},x\in R$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\left(x^2+1\right)}{x+\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{-1}{+\infty}=0$$

deci dreapta de ecuaţie $y=0$ adică axa Ox este asimptotă orizontală la graficul funcţiei f spre $+\infty$.

c) $$f''(x)=\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=1'-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=-\frac{x'\cdot\sqrt{x^2+1}-x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=-\frac{\sqrt{x^2+1}-x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=$$

$$=-\frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}<0,\forall x\in R$$ deci f' este descrescătoare pe **R**.

2.a) $\int_1^e\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_1^e=\ln e-\ln 1=1-0=1$

b)Funcţia f este pozitivă pe intervalul $[1,e]$.

$$Aria\left(\Gamma_f\right)=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\ln xdx=\int_1^e x'\ln xdx=x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e x(\ln x)'dx=e\ln e-1\ln 1-\int_1^e x\frac{1}{x}dx=$$

$$=e-\int_1^e 1dx=e-x\Big|_1^e=e-(e-1)=1$$

S-a folosit mai sus metoda integrării prin părţi pentru integrale definite.

c) $$\int_1^e\frac{1}{x}\left(f(x)\right)^n dx=\int_1^e(\ln x)'(\ln x)^n dx=\frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_1^e=\frac{(\ln e)^{n+1}}{n+1}-\frac{(\ln 1)^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{n+1}$$

Mai sus am folosit formula $\int u^n(x)\cdot u'(x)dx=\frac{u^{n+1}(x)}{n+1}+C$

Mai departe avem:

$$\frac{1}{n+1}=\frac{1}{2015}$$

$$n=2014$$