Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinaţi numărul real x pentru care numerele 2, $x+2$ şi 10 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
5p	**2.** Determinaţi valoarea minimă a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x-10$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\left(x^2-2x\right)=3$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie par.
5p	**5.** Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=(a-2)\vec{i}-2\vec{j}$ şi $\vec{v}=3\vec{i}+2\vec{j}$ sunt opuşi.
5p	**6.** Calculaţi cosinusul unghiului A al triunghiului ABC în care $AB=4$, $AC=5$ şi $BC=6$.

Soluţii

Subiectul1

1. $x+2=\dfrac{2+10}{2}$

$x+2=6$

$x=4$

2. $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-10)=44$

Valoarea minimă a funcţiei f este $-\dfrac{\Delta}{4a}=-\dfrac{44}{4\cdot1}=-11$

3. $x^2-2x=2^3$

$x^2-2x-8=0$

$\Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-8)=4+32=36$

Se obţin soluţiile $x_1=4$ şi $x_2=-2$

4.Probabilitatea unui eveniment se calculează cu formula $P=\dfrac{nrcazurifavorabile}{nrcazuriposibile}$.

Numerele naturale de două cifre sunt 10,11,12,...,99.
In total sunt 99-9=90 numere naturale de două cifre deci sunt 90 de cazuri posibile.
Numerele naturale pare de două cifre sunt 10,12,...,98 deci sunt 45 de cazuri favorabile.

$P=\dfrac{45}{90}=\dfrac{1}{2}$.

5.Vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt opuşi dacă $\vec{u}=-\vec{v}$.

$(a-2)\vec{i}-2\vec{j}=-3\vec{i}-2\vec{j}$

$a-2=-3\Rightarrow a=-1$

6. $\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\dfrac{4^2+5^2-6^2}{2\cdot4\cdot5}=\dfrac{5}{40}=\dfrac{1}{8}$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$.

5p **a)** Calculaţi $\det B$.

5p **b)** Arătaţi că $AB=BA$.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $\det(B+xA)=1$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=xy-4(x+y-5)$.

5p **a)** Calculaţi $4*5$.

5p **b)** Arătaţi că $x*y=(x-4)(y-4)+4$ pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Calculaţi $1*2*3*\cdots*2014$.

Subiectul 2

1.a) $\det B=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{vmatrix}=0+0+0-1-0-0=-1$

b) $A\cdot B=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

$B\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$

$\Rightarrow A\cdot B=B\cdot A.$

c) $B+xA=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}+x\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&x&1\\x&1&x\\1&x&0\end{pmatrix}$

$\det(B+xA)=\begin{vmatrix}0&x&1\\x&1&x\\1&x&0\end{vmatrix}=0+x^2+x^2-1-0-0=2x^2-1$

$2x^2-1=1$

$x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$

2.a) $4*5=4\cdot 5-4(4+5-5)=4$

b) $x*y=xy-4x-4y+20=xy-4x-4y+16+4=x(y-4)-4(y-4)+4=(x-4)(y-4)+4,\forall x,y\in R$

c)Să observăm din punctul b) că $x*4=4*x=4,\forall x\in R$

$\underbrace{(1*2*3)}_{x}*4*\underbrace{(5*...*2014)}_{y}=x*4*y=4*y=4$

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2-3}{x^2+3}$.

5p **a)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5p **b)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{12x}{\left(x^2+3\right)^2},\ x\in\mathbb{R}$.

5p **c)** Arătaţi că funcţia f este convexă pe intervalul $(-1,1)$.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_1^e f(x)\cdot f'(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_1^e x^3 f(x)\,dx=\frac{3e^4+1}{16}$.

5p **c)** Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=e$.

<u>Subiectul 3</u>

1.a)Metoda 1

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3}{x^2+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{3}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{3}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{3}{x^2}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

Metoda 2

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3}{x^2+3}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2-3\right)'}{\left(x^2+3\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x}=1$$

b) $f'(x)=\left(\frac{x^2-3}{x^2+3}\right)'=\frac{\left(x^2-3\right)'\left(x^2+3\right)-\left(x^2-3\right)\left(x^2+3\right)'}{\left(x^2+3\right)^2}=\frac{2x\left(x^2+3\right)-\left(x^2-3\right)2x}{\left(x^2+3\right)^2}=\frac{2x\left(x^2+3-x^2+3\right)}{\left(x^2+3\right)^2}=$

$=\frac{12x}{\left(x^2+3\right)^2},x\in R$

c) $f''(x)=\left(\frac{12x}{\left(x^2+3\right)^2}\right)'=\frac{(12x)'\left(x^2+3\right)^2-12x\left[\left(x^2+3\right)^2\right]'}{\left(x^2+3\right)^4}=\frac{12\left(x^2+3\right)^2-12x\cdot2\cdot\left(x^2+3\right)\left(x^2+3\right)'}{\left(x^2+3\right)^4}=$

$=\frac{12\left(x^2+3\right)^2-12x\cdot2\cdot\left(x^2+3\right)2x}{\left(x^2+3\right)^4}=\frac{12\left(x^2+3\right)-48x^2}{\left(x^2+3\right)^3}=\frac{36-36x^2}{\left(x^2+3\right)^3}=\frac{36\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+3\right)^3},x\in R$

Ecuaţia $f''(x)=0$ are soluţiile $x_1=-1$ şi $x_2=1$.

$f''(x)>0,\forall x\in(-1,1)$ deci funcţia f este convexă pe intervalul $(-1,1)$.

2.a) $\int_1^e f(x)f'(x)dx=\left.\frac{f^2(x)}{2}\right|_1^e=\left.\frac{\ln^2 x}{2}\right|_1^e=\frac{\ln^2 e}{2}-\frac{\ln^2 1}{2}=\frac{1}{2}$

Obs: Pentru calculul de mai sus s-a folosit formula $\int u^n(x)\cdot u'(x)dx=\frac{u^{n+1}(x)}{n+1}+C$ unde $n=1$.

b) $\int_1^e x^3 f(x)dx=\int_1^e x^3\ln x dx=\int_1^e\left(\frac{x^4}{4}\right)'\ln x dx=\frac{x^4}{4}\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x^4}{4}(\ln x)'dx=\frac{e^4}{4}-\int_1^e\frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{e^4}{4}-\frac{1}{4}\int_1^e x^3dx=$

$=\frac{e^4}{4}-\frac{1}{4}\frac{x^4}{4}\Big|_1^e=\frac{e^4}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{e^4}{4}-\frac{1^4}{4}\right)=\frac{e^4}{4}-\frac{e^4}{16}+\frac{1}{16}=\frac{3e^4+1}{16}$ c.c.t.d.

c)Funcţia f este pozitivă pe intervalul $[1,e]$

$Aria=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\ln x dx=\int_1^e x'\ln x dx=x\ln x\Big|_1^e-\int_1^e x(\ln x)'dx=e-\int_1^e 1dx=e-x\Big|_1^e=e-(e-1)=1.$