Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinaţi al doilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $a_1=1$ şi raţia $r=2$.
5p	**2.** Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $A(m,0)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2(x^2+4)=\log_2 8$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $M=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, acesta să fie divizibil cu 3.
5p	**5.** Determinaţi numărul real a, ştiind că vectorii $\vec{u}=(a+1)\vec{i}+4\vec{j}$ şi $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.
5p	**6.** Arătaţi că $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ştiind că $\sin x=\frac{1}{2}$ şi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Soluţii

Subiectul1

1. $a_2=a_1+r=1+2=3$

2.Punem condiţia $f(m)=0$.

$f(m)=m+1=0$

$m=-1$

3.Funcţia logaritmică este injectivă.

$x^2+4=8$

$x^2=4$

$x=\pm 2$

4.Probabilitatea unui eveniment se calculează cu formula $P=\frac{numarcazurifavorabile}{numarcazuriposibile}$

Mulţimea M are 8 elemente deci sunt 8 cazuri posibile.
Numerele 3 şi 6 sunt divizibile cu 3 deci sunt două cazuri favorabile.

$P=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

5.Punem condiţia de coliniaritate a doi vectori:

$\frac{a+1}{1}=\frac{4}{2}$

$a+1=2$

$a=1$

6. $\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cos^2 x=1$

$\cos^2 x=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

Se obţine $\cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}>0$ deoarece $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

$\sin 2x=2\sin x\cos x=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 3 \\ a-1 & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $A(2014)+A(2016)=2A(2015)$.

5p **b)** Determinaţi numărul real a pentru care $\det(A(a))=0$.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\det(A(2)+xA(3))=0$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x*y=-xy-x-y-2$.

5p **a)** Arătaţi că $(-1)*1=-1$.

5p **b)** Arătaţi că $x*y=-(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(x+2)*(2x-3)=5$.

Subiectul 2

1.a) $A(2014)=\begin{pmatrix} 2014 & 3 \\ 2013 & 2 \end{pmatrix}$

$A(2016)=\begin{pmatrix} 2016 & 3 \\ 2015 & 2 \end{pmatrix}$, $A(2015)=\begin{pmatrix} 2015 & 3 \\ 2014 & 2 \end{pmatrix}$

$A(2014)+A(2016)=\begin{pmatrix} 2014 & 3 \\ 2013 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2016 & 3 \\ 2015 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4030 & 6 \\ 4028 & 4 \end{pmatrix}=2\begin{pmatrix} 2015 & 3 \\ 2014 & 2 \end{pmatrix}=2A(2015)$

b) $\det(A(a))=\begin{vmatrix} a & 3 \\ a-1 & 2 \end{vmatrix}=2a-3(a-1)=3-a$

$3-a=0$

$a=3$

c) $A(2)+xA(3)=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+x\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3x & 3x \\ 2x & 2x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+3x & 3+3x \\ 1+2x & 2+2x \end{pmatrix}$

$\det(A(2)+xA(3))=\begin{vmatrix} 2+3x & 3+3x \\ 1+2x & 2+2x \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2+3x & 1 \\ 1+2x & 1 \end{vmatrix}=2+3x-1-2x=1+x$

Pentru calculul determinantului de mai sus am scăzut prima coloană din a doua coloană.

$x+1=0$

$x=-1$

2.a) $(-1)*1=-(-1)\cdot 1-(-1)-1-2=1+1-1-2=-1$

b) $x*y=-xy-x-y-1-1=-x(y+1)-(y+1)-1=-(x+1)(y+1)-1, \forall x,y\in R$

c) $(x+2)*(2x-3)=-(x+3)(2x-2)-1$

$-(x+3)(2x-2)-1=5$

$(x+3)(2x-2)=-6$

$2x^2+4x=0$

$2x(x+2)=0$

Se obţin soluţiile $x_1=-2$ şi $x_2=0$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-8x^2+16$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=4x(x-2)(x+2)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x^4}{x^2+1}$.

5p **c)** Determinaţi coordonatele punctelor situate pe graficul funcţiei f, în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu axa Ox.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+2}{x}$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_1^2 xf(x)dx=\dfrac{7}{2}$.

5p **b)** Demonstraţi că funcţia $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x+2\ln x+2015$ este o primitivă a funcţiei f.

5p **c)** Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=(f(x)-1)\ln x$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=e$ are aria egală cu 1.

Subiectul 3

1.a) $f'(x)=\left(x^4-8x^2+16\right)'=4x^3-16x=4x\left(x^2-4\right)=4x(x-2)(x+2), x\in R$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x^4}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-8x^2+16-x^4}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-8x^2+16}{x^2+1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(-8x^2+16\right)'}{\left(x^2+1\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-16x}{2x}=-8$

c)Se rezolvă ecuaţia $f'(x)=0\Leftrightarrow 4x(x-2)(x+2)=0$

Se obţin soluţiile $x_1=0$, $x_2=2$ şi $x_3=-2$.

$f(0)=16\Rightarrow A(0,16)$

$f(2)=2^4-8\cdot 2^2+16=0\Rightarrow B(2,0)$

$f(-2)=(-2)^4-8\cdot(-2)^2+16=0\Rightarrow C(-2,0)$

2.a) $\int_1^2 xf(x)dx=\int_1^2 x\dfrac{x+2}{x}dx=\int_1^2(x+2)dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+2x\right)\Bigg|_1^2=\left(\dfrac{2^2}{2}+2\cdot 2\right)-\left(\dfrac{1^2}{2}+2\cdot 1\right)=6-\dfrac{5}{2}=\dfrac{7}{2}$

b) $F'(x)=(x+2\ln x+2015)'=1+\dfrac{2}{x}=\dfrac{x+2}{x}=f(x), x\in(0,+\infty)$ deci F este primitivă a funcţiei f.

c) $g(x)=\left(\dfrac{x+2}{x}-1\right)\ln x=\dfrac{2}{x}\ln x, x\in(0,+\infty)$

Funcţia g este pozitivă pe intervalul $[1,e]$.

$Aria=\int_1^e g(x)dx=\int_1^e\dfrac{2}{x}\ln xdx=2\int_1^e\ln x\cdot(\ln x)'dx=2\dfrac{\ln^2 x}{2}\Bigg|_1^e=\ln^2 x\Big|_1^e=\ln^2 e-\ln^2 1=1$