Ministerul Educaţiei Naţionale
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinaţi partea reală a numărului complex $z=3+2(1-i)$.
5p	**2.** Arătaţi că $x_1+x_2+2x_1x_2=23$ ştiind că x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2-3x+10=0$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x^2+x+1}=1$.
5p	**4.** Determinaţi câte numere naturale impare de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulţimii $\{1, 2, 3\}$.
5p	**5.** Determinaţi numărul real a pentru care dreptele de ecuaţii $y=(a-1)x+1$ şi $y=2x-3$ sunt paralele.
5p	**6.** Determinaţi raza cercului circumscris triunghiului ABC în care $AB=3$, $AC=4$ şi $BC=5$.

Soluţii

Subiectul1

1. $z=3+2-2i=5-2i$

$\operatorname{Re} z=5$

2.Din relaţiile lui Viete avem:

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-3}{1}=3$

$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=\frac{10}{1}=10$

$x_1+x_2+2x_1\cdot x_2=3+2\cdot 10=23$

3. $\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)^2=1^2$

$x^2+x+1=1$

$x^2+x=0$

$x(x+1)=0$

$x_1=0$

$x+1=0$

$x_2=-1$

Ambele soluţii verifică ecuaţia dată.

4.Numerele naturale impare de trei cifre distincte formate cu elemente din mulţimea $\{1,2,3\}$ sunt 123,213,321,231 deci sunt 4 astfel de numere.

5.Cele două drepte sunt paralele dacă şi numai dacă au aceeaşi pantă adică $a-1=2$ de unde rezultă $a=3$.

6. $AB^2=9$

$AC^2=16$

$BC^2=25$

$BC^2=AB^2+AC^2$ şi conform reciprocei teoremei lui Pitagora rezultă că triunghiul dat este dreptunghic cu unghiul

$A=90^0$.

Intr-un triunghi dreptunghic raza cercului circumscris este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei deci avem $R=\frac{BC}{2}=\frac{5}{2}$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculaţi $\det(A(2))$.

5p **b)** Determinaţi numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(-x)=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p **c)** Arătaţi că $\det(A(1)+A(2)+\cdots+A(n))=\frac{n^2(n-1)(n+3)}{4}$ pentru orice număr natural nenul n.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=4(x+y-3)-xy$.

5p **a)** Calculaţi $2*4$.

5p **b)** Arătaţi că $x*y=4-(x-4)(y-4)$ pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x*x*x=x$.

Subiectul 2

1.a) $\det(A(2))=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4-1=3$

b) $A(x)\cdot A(-x)=\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-x^2 & 0 \\ 0 & 1-x^2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1-x^2 & 0 \\ 0 & 1-x^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$1-x^2=1$

$\Rightarrow x=0$

c)

$$A(1)+A(2)+...+A(n)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}+...+\begin{pmatrix} n & 1 \\ 1 & n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+2+...+n & n \\ n & 1+2+...+n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & n \\ n & \frac{n(n+1)}{2} \end{pmatrix}, \forall n\in N^*$$

$$\det(A(1)+A(2)+...+A(n))=\begin{vmatrix} \frac{n(n+1)}{2} & n \\ n & \frac{n(n+1)}{2} \end{vmatrix}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}-n^2=\frac{n^2(n+1)^2-4n^2}{4}=\frac{n^2\left[(n+1)^2-4\right]}{4}=$$

$$=\frac{n^2(n+1-2)(n+1+2)}{4}=\frac{n^2(n-1)(n+3)}{4}, \forall n\in N^*$$

2.a) $2*4=4(2+4-3)-2\cdot 4=4\cdot 3-2\cdot 4=12-8=4$

b) $x*y=4x+4y-12-xy=4+4x+4y-16-xy=4-(xy-4x-4y+16)=4-\left[x(y-4)-4(y-4)\right]=$

$=4-(x-4)(y-4), \forall x,y\in R$

c) $x*x=4-(x-4)^2$

$(x*x)*x=\left[4-(x-4)^2\right]*x=4-\left[4-(x-4)^2-4\right](x-4)=4+(x-4)^3$

Se obţine ecuaţia $4+(x-4)^3=x$

$(x-4)^3-(x-4)=0$

$(x-4)\left[(x-4)^2-1\right]=0$

$(x-4)(x-4-1)(x-4+1)=0$

$(x-4)(x-5)(x-3)=0$

$x-4=0\Rightarrow x_1=4$

$x-5=0\Rightarrow x_2=5$

$x-3=0\Rightarrow x_3=3$

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x-x+1$.
5p	**a)** Arătaţi că $\lim\limits_{x\to e} f(x)=1$.
5p	**b)** Arătaţi că $f'(x)=\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**c)** Arătaţi că $f(x)\geq 0$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcţia $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^2+8x+15}$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_0^{2014}(x+3)(x+5)f(x)dx=2014$.
5p	**b)** Arătaţi că $\int_{-1}^{1} f(x)\cdot f'(x)dx=-\dfrac{1}{144}$.
5p	**c)** Determinaţi numărul real a, $a>0$ ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=a$, are aria egală cu $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{10}{9}$.

Subiectul 3

1.a) $\lim\limits_{x\to e} f(x)=\lim\limits_{x\to e}(x\ln x-x+1)=e\ln e-e+1=e-e+1=1$

b) $f'(x)=(x\ln x-x+1)'=(x\ln x)'-x'+1'=x'\ln x+x(\ln x)'-1=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}-1=\ln x+1-1=\ln x, x\in(0,+\infty)$

c) Se face tabelul cu monotonia funcţiei f.

$f'(x)=0\Rightarrow\ln x=0\Rightarrow x=1.$

$f(1)=1\ln 1-1+1=0$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		- - - - - - - - -	0	+ + + + + + + + +	
$f(x)$		↘	0	↗	

Din tabel rezultă că $f(x)\geq 0, \forall x\in(0,+\infty)$

2.a)

$$\int_0^{2014}(x+3)(x+5)f(x)dx=\int_0^{2014}(x+3)(x+5)\frac{1}{x^2+8x+15}dx=\int_0^{2014}\left(x^2+8x+15\right)\frac{1}{x^2+8x+15}dx=\int_0^{2014}1dx=x\Big|_0^{2014}=2014$$

b) $\int_{-1}^{1}f(x)f'(x)dx=\left.\frac{f^2(x)}{2}\right|_{-1}^{1}=\left.\frac{1}{2\left(x^2+8x+15\right)^2}\right|_{-1}^{1}=\frac{1}{2\left(1^2+8\cdot1+15\right)^2}-\frac{1}{2\left((-1)^2+8(-1)+15\right)^2}=$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{576}-\frac{1}{64}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{576}-\frac{9}{576}\right)=\frac{1}{2}\left(-\frac{8}{576}\right)=-\frac{1}{144}$$

c) $Aria=\int_0^a\left|f(x)\right|dx=\int_0^a\frac{1}{x^2+8x+15}dx=\int_0^a\frac{(x+4)'}{(x+4)^2-1}dx=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+4-1}{x+4+1}\right|\Bigg|_0^a=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+3}{x+5}\right|\Bigg|_0^a=$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{a+3}{a+5}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{3}{5}\right|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\frac{a+3}{a+5}}{\frac{3}{5}}\right|=\frac{1}{2}\ln\frac{5(a+3)}{3(a+5)}$$

Se obţine ecuaţia $\frac{1}{2}\ln\frac{5(a+3)}{3(a+5)}=\frac{1}{2}\ln\frac{10}{9}$

$$\frac{5(a+3)}{3(a+5)}=\frac{10}{9}$$

$$\frac{a+3}{a+5}=\frac{2}{3}$$

$$3a+9=2a+10$$

$$a=1$$