Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că $\frac{1}{2}:0,5-1=0$.

5p **2.** Calculaţi $f(-1)+f(0)+f(1)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{3x+1}=5$.

5p **4.** Un obiect costă 150 lei. Calculaţi preţul obiectului după o scumpire cu 30%.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,5)$ şi $B(3,5)$. Determinaţi distanţa de la punctul A la punctul B.

5p **6.** Calculaţi lungimea laturii AB a triunghiului ABC dreptunghic în A, ştiind că $AC=5$ şi $m(\sphericalangle B)=45^\circ$.

Soluţii

Subiectul1

1. $0,5=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}:\frac{1}{2}-1=1-1=0$

2. $f(-1)=(-1)^2+(-1)=1-1=0$

$f(0)=0^2+0=0$

$f(1)=1^2+1=2$

$f(-1)+f(0)+f(1)=0+0+2=2$

3.Condiţii de existenţă $3x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -\frac{1}{3}$

Pentru rezolvare se ridică la pătrat ambii membri ai ecuaţiei date:

$\left(\sqrt{3x+1}\right)^2=5^2$

$3x+1=25$

$3x=24$

$x=8$

care verifică ecuaţia dată.

4.Se calculează scumpirea $\frac{30}{100}\cdot 150=45lei$

Preţul final al obiectului este $150+45=195lei$

5.Distanţa dintre două puncte in plan se calculează cu formula $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$AB=\sqrt{(3-1)^2+(5-5)^2}=\sqrt{4+0}=2$

6. $m(B)=m(C)=45^0$ deci triunghiul ABC este dreptunghic isoscel.

$AB=AC=5$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricele $M=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
5p	**a)** Arătați că $\det M=4$.
5p	**b)** Arătați că $M\cdot M+3M+4I_2=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.
5p	**c)** Determinaţi numerele reale a și b astfel încât $M\cdot M\cdot M=aM+bI_2$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3-5X^2+5X-1$.
5p	**a)** Arătați că $f(1)=0$.
5p	**b)** Arătați că $f(a)+f(-a)+2\le 0$, pentru orice număr real a.
5p	**c)** Demonstrați că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=15x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul 2

1.a) $\det M=\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -1 & -1\end{vmatrix}=(-2)(-1)-2(-1)=2+2=4$

b) $M\cdot M=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 3 & -1\end{pmatrix}$

$3M=3\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 6\\ -3 & -3\end{pmatrix}$

$4I_2=4\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$

$M\cdot M+3M+4I_2=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 3 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & 6\\ -3 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=O_2$

c) $M\cdot M\cdot M=M^2\cdot M=\begin{pmatrix}2 & -6\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 10\\ -5 & 7\end{pmatrix}$

$aM+bI_2=a\begin{pmatrix}-2 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2a+b & 2a\\ -a & -a+b\end{pmatrix}$

Rezultă :

$\begin{pmatrix}-2a+b & 2a\\ -a & -a+b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 10\\ -5 & 7\end{pmatrix}$

Se obţin egalităţile:

$$\begin{cases}-2a+b=2\\ 2a=10\\ -a=-5\\ -a+b=7\end{cases}$$

In final obţinem $a=5$ şi $b=12$.

2.a) $f(1)=1^3-5\cdot 1^2+5\cdot 1-1=1-5+5-1=0$

b) $f(a)=a^3-5a^2+5a-1$

$f(-a)=(-a)^3-5(-a)^2+5(-a)-1=-a^3-5a^2-5a-1$

$f(a)+f(-a)+2=a^3-5a^2+5a-1-a^3-5a^2-5a-1+2=-10a^2\le 0,\forall a\in R$

c)Din relaţiile lui Viete avem:

$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}=-\frac{-5}{1}=5$

$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{c}{a}=\frac{5}{1}=5$

$x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}=-\frac{-1}{1}=1$

$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)=5^2-2\cdot 5=15=15\cdot 1=15x_1x_2x_3$

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-6x+1$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=6(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei f.
5p	**c)** Demonstraţi că $f(2012)+f(2014)\le f(2013)+f(2015)$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-4$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_0^1 (f(x)+4)dx=\frac{1}{3}$.
5p	**b)** Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{f(x)+5}$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=0$ şi $x=1$.
5p	**c)** Determinaţi numărul real a, $a>1$, pentru care $\int_1^a \frac{f(x)+4}{x}dx=12$.

Subiectul 3

1.a) $f'(x)=(2x^3-6x+1)'=2\cdot 3x^2-6\cdot 1=6x^2-6x=6(x^2-1)=6(x-1)(x+1), x\in R$

b)Ecuaţia tangentei la graficul unei funcţii se află cu formula $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$x_0=1$

$y-f(1)=f'(1)(x-1)$

$f(1)=2\cdot 1^3-6\cdot 1+1=2-6+1=-3$

$f'(1)=0$

$y-(-3)=0(x-1)$

Ecuaţia tangentei este $y=-3$ (dreaptă orizontală).

c) $f'(x)\ge 0,\forall x\in[1,+\infty)$ deci funcţia f este crescătoare pe intervalul $[1,+\infty)$.

$\Rightarrow f(2012)\le f(2013)$

$f(2014)\le f(2015)$

Din adunarea celor două inegalităţi rezultă $f(2012)+f(2014)\le f(2013)+f(2015)$

2.a) $\int_0^1 (f(x)+4)dx=\int_0^1 (x^2-4+4)dx=\int_0^1 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}=\frac{1}{3}$

b) $g(x)=\dfrac{1}{f(x)+5}=\dfrac{1}{x^2+1}, x\in R$

Funcţia g este pozitivă pe **R**.

$$Aria=\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\frac{1}{x^2+1}dx=arctgx\Big|_0^1=arctg1-arctg0=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$$

c) $\int_1^a\dfrac{f(x)+4}{x}dx=\int_1^a\dfrac{x^2-4+4}{x}dx=\int_1^a xdx=\dfrac{x^2}{2}\Big|_1^a=\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{a^2-1}{2}$

$\dfrac{a^2-1}{2}=12$

$a^2-1=24$

$a^2=25$

Deoarece $a>1$ rezultă $a=5$.