Ministerul Educaţiei Naţionale
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

Examenul de bacalaureat naţional 2014
Proba E. c) – 2 iulie 2014
Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculaţi suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ ştiind că $a_1=6$ şi $a_2=12$.
5p	**2.** Determinaţi coordonatele vârfului parabolei asociate funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x+4$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(3^x-1)(3^x-3)=0$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să conţină cifra 1.
5p	**5.** Se consideră triunghiul echilateral ABC cu $AB=2$. Calculaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.
5p	**6.** Calculaţi aria triunghiului isoscel ABC ştiind că $A=\frac{\pi}{2}$ şi $AC=4$.

Soluţii

Subiectul1

1.Raţia progresiei este $r=a_2-a_1=6$

$a_3=a_2+r=18$

Suma primilor trei termeni este $S=a_1+a_2+a_3=6+12+18=36$

2.Varful parabolei este $V\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$

$-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2\cdot 1}=-1$

$\Delta=b^2-4ac=4-16=-12$

$-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{-12}{4\cdot 1}=3$

$\Rightarrow V(-1,3)$

3. $3^x-1=0$

$3^x=1\Rightarrow x=0$

$3^x-3=0$

$3^x=3\Rightarrow x=1$

4. $P=\frac{nrcazurifavorabile}{nrcazuriposibile}$

Numerele naturale de două cifre sunt 10,11,...,99.
In total sunt 99-9=90 numere naturale de două cifre deci sunt 90 de cazuri posibile.
Cele care conţin cifra 1 sunt 10,11,...,19,21,31,41,51,61,71,81,91 deci sunt 18 cazuri favorabile.

$P=\frac{18}{90}=\frac{1}{5}$

5.Conform regulii triunghiului avem $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

$\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right\|=\left\|\overrightarrow{AC}\right\|=2$

6.Triunghiul ABC este dreptunghic isoscel cu unghiul $A = 90^0$.
Laturile egale sunt catetele deci $AB = AC = 4$.

$$Aria(\Delta ABC) = \frac{AB \cdot AC}{2} = 8$$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & 2 \\ a & a & 2 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(0)) = 8$.
5p	**b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a)) = 0$.
5p	**c)** Determinați matricea $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ știind că $A(1) \cdot X = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.
	2. Se consideră x_1, x_2, x_3 rădăcinile polinomului $f = X^3 - 2X^2 + 3X + m$, unde m este număr real.
5p	**a)** Calculați $f(1)$.
5p	**b)** Arătați că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2$.
5p	**c)** Determinați numărul real m știind că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 8$.

Subiectul 2

1.a) $\det(A(0)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 8$

b)Metoda 1

$$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & 2 \\ a & a & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & a & a \\ a-2 & 2-a & 2-a \\ a-2 & 0 & 2-a \end{vmatrix} = (a-2)^2 \begin{vmatrix} 2 & a & a \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (a-2)^2 \begin{vmatrix} 2 & a & a \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (a-2)^2 (a+2)$$

$(a-2)^2 (a+2) = 0$

$(a-2)^2 = 0 \Rightarrow a = 2$

$a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$

Metoda 2

$$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 2 & a & a \\ a & 2 & 2 \\ a & a & 2 \end{vmatrix} = 8 + a^3 + 2a^2 - 2a^2 - 4a - 2a^2 = a^3 - 2a^2 - 4a + 8$$

$a^3 - 2a^2 - 4a + 8 = 0$

$a^2(a-2) - 4(a-2) = 0$

$(a-2)(a^2 - 4) = 0$

$(a-2)(a-2)(a+2) = 0$

$(a-2)^2 (a+2) = 0$

$(a-2)^2 = 0 \Rightarrow a = 2$

$a + 2 = 0 \Rightarrow a = -2$

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ x + 2y + 2z = 5 \\ x + y + 2z = 4 \end{cases}$$

$\det\left(A(1)\right) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 1 + 2 - 2 - 4 - 2 = 3 \neq 0$ deci sistemul este de tip Cramer.

$$d_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 16 + 5 + 8 - 8 - 8 - 10 = 3$$

$$d_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 20 + 4 + 8 - 5 - 16 - 8 = 3$$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 16 + 4 + 5 - 8 - 10 - 4 = 3$$

$$x = \frac{d_1}{\det\left(A(1)\right)} = \frac{3}{3} = 1$$

$$y = \frac{d_2}{\det\left(A(1)\right)} = \frac{3}{3} = 1$$

$$z = \frac{d_3}{\det\left(A(1)\right)} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.a) $f(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + m = m + 2$

b) Din relaţiile lui Viete avem:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} = \frac{3}{1} = 3$$

Mai departe avem:

$$(x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

$$4 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -2$$

c) x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f deci avem:

$x_1^3-2x_1^2+3x_1+m=0$

$x_2^3-2x_2^2+3x_2+m=0$

$x_3^3-2x_3^2+3x_3+m=0$

Prin adunarea celor trei relaţii obţinem:

$x_1^3+x_2^3+x_3^3-2\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+3\left(x_1+x_2+x_3\right)+3m=0$

$\Rightarrow 8-2\cdot(-2)+3\cdot 2+3m=0$

$8+4+6+3m=0$

$3m=-18$

$m=-6$

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.
5p	**c)** Arătaţi că $f(x)\le\frac{1}{e}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x+1$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_0^1 f(x)dx=\frac{11}{6}$.
5p	**b)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{f(x)}dx$. Arătaţi că $I_{n+1}\le I_n$ pentru orice număr natural nenul n.
5p	**c)** Determinaţi numărul real pozitiv a ştiind că $\int_0^a\frac{2x+1}{f(x)}dx=\ln 3$.

<u>**Subiectul 3**</u>

1.a) Se foloseşte regula de derivare a unei fracţii $\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'\cdot g-f\cdot g'}{g^2}$

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{(\ln x)'\cdot x-\ln x\cdot x'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2},x\in(0,+\infty)$$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\frac{1}{+\infty}=0$ deci graficul funcţiei are asimptotă orizontală spre $+\infty$ dreapta de ecuaţie $y=0$ adică axa Ox.

c) Se face tabelul cu monotonia funcţiei f.

$f'(x)=0\Rightarrow\frac{1-\ln x}{x^2}=0\Rightarrow 1-\ln x=0\Rightarrow x=e$.

$f(e)=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	+ + + + + + + +		0	- - - - - - - - - - -	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	

Din tabel rezultă că $f(x) \leq \frac{1}{e}, \forall x \in (0,+\infty)$

2.a) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 (x^2+x+1)dx = \left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_0^1 = \left(\frac{1^3}{3}+\frac{1^2}{2}+1\right)-\left(\frac{0^3}{3}+\frac{0^2}{2}+0\right) = \frac{2}{6}+\frac{3}{6}+\frac{6}{6} = \frac{11}{6}$.

b) $I_{n+1}-I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{f(x)}dx - \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)}dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^n}{f(x)}dx = \int_0^1 \frac{\overbrace{x^n}^{+}\overbrace{(x-1)}^{-}}{\underbrace{f(x)}_{+}}dx \leq 0$

$\Rightarrow I_{n+1} \leq I_n, \forall n \in N^*$

c) $\int_0^a \frac{2x+1}{f(x)}dx = \int_0^a \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \int_0^a \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1}dx = \ln(x^2+x+1)\Big|_0^a = \ln(a^2+a+1)$

$\Rightarrow \ln(a^2+a+1) = \ln 3$

$a^2+a+1=3$

$a^2+a-2=0$

$\Delta = 9$

Se obţine o singură soluţie pozitivă $a=1$.