Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătaţi că $\left(\sqrt{5}+1\right)^2+\left(\sqrt{5}-1\right)^2=12$.

5p **2.** Calculaţi produsul $f(1)f(2)f(3)f(4)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\left(x^2-4x+4\right)=0$.

5p **4.** Determinaţi câte numere naturale impare, de trei cifre distincte, se pot forma cu cifrele 2, 3 şi 4.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$ şi $B(2,3)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul A şi este perpendiculară pe dreapta AB.

5p **6.** Arătaţi că $\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)=0$, pentru orice număr real x.

Soluţii

Subiectul1

1. $\left(\sqrt{5}+1\right)^2=\sqrt{5}^2+2\sqrt{5}+1=6+2\sqrt{5}$

$\left(\sqrt{5}-1\right)^2=\sqrt{5}^2-2\sqrt{5}+1=6-2\sqrt{5}$

$\left(\sqrt{5}+1\right)^2+\left(\sqrt{5}-1\right)^2=6+2\sqrt{5}+6-2\sqrt{5}=12$

2. Observăm că $f(3)=0$ deci avem $f(1)f(2)f(3)f(4)=0$

3. $x^2-4x+4=2^0$

$x^2-4x+4=1$

$x^2-4x+3=0$

care are soluţiile $x_1=1$ şi $x_2=3$

4. Cifra unităţilor este 3.

Numerele sunt 243 şi 423 deci se pot forma două numere.

5. Panta dreptei AB este $m_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\dfrac{3-2}{2-1}=1$

$d\perp AB\Rightarrow m_d\cdot m_{AB}=-1\Rightarrow m_d=-1$

Pentru a afla ecuaţia dreptei d se foloseşte formula $y-y_0=m(x-x_0)$

In cazul nostru avem:

$y-2=-1(x-1)$

$y-2=-x+1$

$d: x+y-3=0$

6. $\sin(\pi-x)=\sin x$

$\sin(\pi+x)=-\sin x$

$\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)=\sin x-\sin x=0, \forall x\in R$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $B(x)=\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&0\\3x&0&1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(B(0))=1$.

5p **b)** Arătați că $B(x)+B(y)=2B\left(\frac{x+y}{2}\right)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinaţi numerele reale x pentru care $B(x^2+1)B(x)=B(x^2+x+1)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=\frac{1}{2}(x-3)(y-3)+3$.

5p **a)** Arătați că $(-3)\circ 3=3$.

5p **b)** Determinaţi numerele naturale n pentru care $n\circ n=11$.

5p **c)** Calculaţi $1\circ 2\circ 3\circ\ldots\circ 2015$.

Subiectul 2

1.a) $\det(B(0))=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1+0+0-0-0-0=1$

b)

$$B(x)+B(y)=\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&0\\3x&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&y\\0&1&0\\3y&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&x+y\\0&2&0\\3(x+y)&0&2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1&0&\frac{x+y}{2}\\0&1&0\\3\frac{(x+y)}{2}&0&1\end{pmatrix}=2B\left(\frac{x+y}{2}\right),\forall x,y\in R$$

c)

$$B(x^2+1)=\begin{pmatrix}1&0&x^2+1\\0&1&0\\3(x^2+1)&0&1\end{pmatrix}$$

$$B(x^2+1)B(x)=\begin{pmatrix}1&0&x^2+1\\0&1&0\\3(x^2+1)&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&0\\3x&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3x(x^2+1)&0&x^2+x+1\\0&1&0\\3x^2+3x+3&0&3x(x^2+1)+1\end{pmatrix}$$

$$B(x^2+1)B(x)=\begin{pmatrix}1&0&x^2+1\\0&1&0\\3(x^2+1)&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&0\\3x&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+3x(x^2+1)&0&x^2+x+1\\0&1&0\\x^2+3x+1&0&x(x^2+1)+1\end{pmatrix}$$

$$B(x^2+x+1)=\begin{pmatrix}1&0&x^2+x+1\\0&1&0\\3(x^2+x+1)&0&1\end{pmatrix}$$

Se obține egalitatea matriceală:

$$\begin{pmatrix} 1+3x\left(x^2+1\right) & 0 & x^2+x+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3x^2+3x+3 & 0 & 3x\left(x^2+1\right)+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x^2+x+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3\left(x^2+x+1\right) & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De unde obţinem ecuaţia $x\left(x^2+1\right)=0$ care are o singură solutie reală $x=0$.

2.a) $(-3)\circ 3=\frac{1}{2}(-3-3)(3-3)+3=0+3=3$

b) $n\circ n=\frac{1}{2}(n-3)^2+3$

$\frac{1}{2}(n-3)^2+3=11$

$(n-3)^2=16$

$n-3=\pm 4$

Se obţine o singură soluţie număr natural şi anume $n=7$.

c)Observăm că $x\circ 3=3, \forall x\in R$ şi $3\circ y=3, \forall y\in R$

$1\circ 2\circ 3\circ 4\circ \ldots \circ 2015=\underbrace{1\circ 2}_{x}\circ 3\circ \underbrace{4\circ \ldots \circ 2015}_{y}=x\circ 3\circ y=3$

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+2}{x-1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=-\frac{3}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Arătaţi că funcţia f este convexă pe intervalul $(1,+\infty)$.

5p **c)** Determinaţi coordonatele punctului situat pe graficul funcţiei f, în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=-3x$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_1^2 \frac{1}{x}f(x)dx=e(e-1)$.

5p **b)** Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(1)=0$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)dx$. Arătaţi că $I_n+(n+1)I_{n-1}=e$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

Subiectul 3

1.a) $f'(x)=\left(\frac{x+2}{x-1}\right)'=\frac{(x+2)'(x-1)-(x+2)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x-2}{(x-1)^2}=-\frac{3}{(x-1)^2}, \forall x\in(1,+\infty)$

b) $f''(x)=\left(-\frac{3}{(x-1)^2}\right)'=-3\left(\frac{1}{(x-1)^2}\right)'=-3(-1)\frac{2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{6}{(x-1)^3}>0, \forall x\in(1,+\infty)$

deci funcţia dată este convexă pe domeniul ei de definiţie.

c)Dreapta dată are panta egală cu -3.

Punem condiţia $f'(x)=-3$

$-\frac{3}{(x-1)^2}=-3$

$(x-1)^2=1$

$x-1=\pm 1$

Se obţine o singură soluţie in domeniul de definiţie al funcţiei date şi anume $x=2$.

$f(2)=4$

Punctul de pe grafic este $A(2,4)$.

2.a) $\int_1^2 \frac{1}{x} f(x)dx=\int_1^2 \frac{1}{x} xe^x dx=\int_1^2 e^x dx=e^x\Big|_1^2=e^2-e^1=e(e-1)$

b)Mulţimea primitivelor funcţiei f este integrala nedefinită a funcţiei f.

$\int f(x)dx=\int xe^x dx=\int x(e^x)' dx=xe^x-\int x'e^x dx=xe^x-e^x+C$

O primitivă oarecare a funcţiei f este $F(x)=xe^x-e^x+c$ unde $c\in R$ se obţine din condiţia $F(1)=0$.

$F(1)=c$

$\Rightarrow c=0$

Primitiva cerută este $F:R\to R$, $F(x)=e^x(x-1)$

c) $I_n=\int_0^1 x^n f(x)dx=\int_0^1 x^n xe^x dx=\int_0^1 x^{n+1}e^x dx$

$I_{n-1}=\int_0^1 x^n e^x dx$

$I_n=\int_0^1 x^{n+1}e^x dx=\int_0^1 x^{n+1}(e^x)' dx=x^{n+1}e^x\Big|_0^1-\int_0^1 (x^{n+1})' e^x dx=e-(n+1)\int_0^1 x^n e^x dx=e-(n+1)I_{n-1}$

$I_n+(n+1)I_{n-1}=e, \forall n\in N, n\geq 2$