Ministerul Educaţiei Naţionale
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră numărul complex $z=2+i$. Arătaţi că $z+\overline{z}+z\overline{z}=9$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.
5p	**2.** Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $A(1,m)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-3$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $(1-\log_2 x)(2-\log_2 x)=0$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor strict mai mică decât cifra unităţilor.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$, $B(3,3)$ şi $C(0,2)$. Determinaţi lungimea medianei din C a triunghiului ABC.
5p	**6.** Arătaţi că $(1+\text{tg}^2 x)\cos^2 x-(1+\text{ctg}^2 x)\sin^2 x=0$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Soluţii

Subiectul1

1. Dacă $z=a+bi$ este un număr complex, atunci conjugatul său este $\overline{z}=a-bi$.
In cazul nostru $\overline{z}=2-i$.
$z+\overline{z}+z\overline{z}=2+i+2-i+(2+i)(2-i)=4+4-i^2=8-(-1)=9$

2. Punem condiţia $f(1)=m$.
$f(1)=1^2+2\cdot 1-3=1+2-3=0$
$\Rightarrow m=0$

3. $(1-\log_2 x)(2-\log_2 x)=0$
Punem condiţia de existenţă $x>0$.
Rezultă $1-\log_2 x=0$ sau $2-\log_2 x=0$.
$1-\log_2 x=0\Rightarrow \log_2 x=1\Rightarrow x=2$
$2-\log_2 x=0\Rightarrow \log_2 x=2\Rightarrow x=4$
Soluţiile sunt $x=2$ şi $x=4$.

4. $P=\dfrac{nr.cazurifavorabile}{nr.cazuriposibile}$
Numerele naturale de două cifre sunt 10,11,...,99 deci in total sunt 99-9=90 cazuri posibile.
Numerele naturale care au cifra zecilor strict mai mică decat cifra unităţilor sunt:
12,13,14,15,16,17,18,19
23,24,25,26,27,28,29
34,35,36,37,38,39
45,46,47,48,49
56,57,58,59
67,68,69
78,79

In total sunt 1+2+3+...+8=36 cazuri favorabile.

$P=\frac{36}{90}=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

5. Mijlocul unui segment este $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$\left.\begin{matrix}A(3,1)\\B(3,3)\end{matrix}\right\}\Rightarrow M\left(\frac{3+3}{2},\frac{1+3}{2}\right)\Rightarrow M(3,2)$ este mijlocul segmentului AB.

Lungimea unui segment este dată de formula $MC=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$MC=\sqrt{(3-0)^2+(2-2)^2}=\sqrt{9}=3$

6. Pentru rezolvare se poate folosi formula fundamentală a trigonometriei $\sin^2 x+\cos^2 x=1,\forall x\in R$ (deşi se poate rezolva şi fără această formulă).

$$(1+tg^2x)\cos^2 x-(1+ctg^2x)\sin^2 x=\left(1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)\cos^2 x-\left(1+\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)\sin^2 x=$$

$$=\left(\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)\cos^2 x-\left(\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}\right)\sin^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}\cos^2 x-\frac{1}{\sin^2 x}\sin^2 x=1-1=0,\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&a\\-2&-1&3\end{pmatrix}$ şi sistemul de ecuaţii $\begin{cases}x+y+2z=0\\x+2y+az=0\\-2x-y+3z=0\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det(A(9))=0$.

5p **b)** Determinaţi valorile reale ale lui a pentru care sistemul are soluţie unică.

5p **c)** Demonstraţi că, dacă sistemul are soluţia (x_0,y_0,z_0), cu x_0, y_0 şi z_0 numere reale nenule, atunci $-x_0+y_0+z_0=11(x_0+y_0+z_0)$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+7x+7y+42$.

5p **a)** Arătaţi că $x\circ y=(x+7)(y+7)-7$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **b)** Determinaţi numerele reale x, ştiind că $x\circ x=x$.

5p **c)** Determinaţi numărul real a, ştiind că $2017^a\circ(-6)=1$.

Subiectul 2

1.a) $A(9)=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&2&9\\-2&-1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(9))=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&9\\-2&-1&3\end{vmatrix}=6-2-18+8+9-3=0$.

b) Un sistem pătratic omogen are soluţie unică dacă şi numai dacă determinantul său este diferit de 0 (in acest caz are doar soluţia banală x=y=z=0)

Matricea asociată sistemului este $A(a)$.

$$\det(A(a))=\begin{vmatrix}1&1&2\\1&2&a\\-2&-1&3\end{vmatrix}=6-2-2a+8+a-3=9-a$$

$\det(A(a))\neq 0\Leftrightarrow 9-a\neq 0\Leftrightarrow a\in R\setminus\{9\}$

c) Sistemul are soluţie nenulă $(x_0, y_0, z_0) \Leftrightarrow a = 9$.

Se rezolvă sistemul punand $z = \alpha \in R$ necunoscută secundară şi oprind doar primele două ecuaţii din sistem:

$$\begin{cases} x + y = -2\alpha \\ x + 2y = -9\alpha \end{cases}$$

Prin metoda reducerii obţinem $x = 5\alpha$ şi $y = -7\alpha$

Aşadar soluţia sistemului este $\begin{cases} x_0 = 5\alpha \\ y_0 = -7\alpha \\ z_0 = \alpha \end{cases}$ unde $\alpha \in R$

$$\left.\begin{array}{l} -x_0 + y_0 + z_0 = -5\alpha - 7\alpha + \alpha = -11\alpha \\ 11(x_0 + y_0 + z_0) = 11(5\alpha - 7\alpha + \alpha) = -11\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow -x_0 + y_0 + z_0 = 11(x_0 + y_0 + z_0)$$

2.a) $x \circ y = xy + 7x + 7y + 49 - 7 = x(y+7) + 7(y+7) - 7 = (x+7)(y+7) - 7, \forall x, y \in R$

b) $x \circ x = x \cdot x + 7x + 7x + 42 = x^2 + 14x + 42$

$x^2 + 14x + 42 = x$

$x^2 + 13x + 42 = 0$

$\Delta = 169 - 168 = 1$

$x_1, x_2 = \dfrac{-13 \pm 1}{2}$

Se obţin soluţiile $x_1 = -6$ şi $x_2 = -7$.

c) $2017^a \circ (-6) = (2017^a + 7)(-6 + 7) - 7 = 2017^a + 7 - 7 = 2017^a$

$2017^a = 1 \Leftrightarrow a = 0$

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{1 - x}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x) = \dfrac{1 - x + x\ln x}{x(1-x)^2}$, $x \in (1, +\infty)$.

5p **b)** Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

5p **c)** Demonstraţi că $x \ln x > x - 1$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + 3x^2$.

5p **a)** Arătaţi că $\int_0^1 \left(f(x) - 3x^2\right) dx = e - 1$.

5p **b)** Arătaţi că $\int_0^1 x f(x)\, dx = \dfrac{7}{4}$.

5p **c)** Determinaţi numărul natural nenul n, pentru care suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - e^x$, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x = 0$ şi $x = n$ are aria egală cu $n^2 - n + 1$.

Subiectul 3

1.a) $f'(x) = \left(\dfrac{\ln x}{1-x}\right)' = \dfrac{(\ln x)'(1-x) - (\ln x)(1-x)'}{(1-x)^2} = \dfrac{\frac{1}{x}(1-x) + \ln x}{(1-x)^2} = \dfrac{1 - x + x\ln x}{x(1-x)^2}, x \in (1, +\infty)$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{1-x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(1-x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{\infty}=0$

deci ecuaţia asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcţiei f este $y=0$ (axa Ox).

c) Considerăm funcţia ajutătoare $g:(1,+\infty)\to R$ prin formula $g(x)=x\ln x-x+1$

$g'(x)=(x\ln x-x+1)'=(x\ln x)'-x'+1'=x'\ln x+x(\ln x)'-x'=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}-1=\ln x, x\in(1,+\infty)$

$g'(x)=\ln x>0, x\in(1,+\infty)$ deci funcţia g este strict crescătoare pe intervalul $(1,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to1} g(x)=\lim\limits_{x\to1}(x\ln x-x+1)=1\cdot\ln1-1+1=0$ de unde rezultă că $g(x)>0, x\in(1,+\infty)$

$x\ln x-x+1>0$

$x\ln x>x-1, x\in(1,+\infty)$

2.a) $\int_0^1\left(f(x)-3x^2\right)dx=\int_0^1\left(e^x+3x^2-3x^2\right)dx=\int_0^1 e^x dx=e^x\Big|_0^1=e^1-e^0=e-1$

b) $\int_0^1 x\cdot f(x)dx=\int_0^1 x\left(e^x+3x^2\right)dx=\int_0^1\left(xe^x+3x^3\right)dx=\underbrace{\int_0^1 xe^x dx}_{I_1}+\underbrace{\int_0^1 3x^3 dx}_{I_2}$

$I_1=\int_0^1 xe^x dx=\int_0^1 x\left(e^x\right)' dx=xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 x'e^x dx=e-\int_0^1 e^x dx=e-(e-1)=1$ (metoda integrării prin părţi)

$I_2=\int_0^1 3x^3 dx=3\int_0^1 x^3 dx=3\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{3}{4}$

$\int_0^1 x\cdot f(x)dx=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$

c) $g(x)=e^x+3x^2-e^x=3x^2$ este funcţie pozitivă pe **R**

$Aria=\int_0^n g(x)dx=\int_0^n 3x^2 dx=3\frac{x^3}{3}\Big|_0^n=n^3$

$n^3=n^2-n+1$

$n^3-n^2+n-1=0$

$n^2(n-1)+n-1=0$

$(n-1)(n^2+1)=0$

$n=1\in N$