Ministerul Educației Naționale
Centrul Național de Evaluare și Examinare

Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați numărul complex z, știind că $2\overline{z}-z=1-3i$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+1$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m, știind că vârful parabolei asociate funcției f se află pe axa Ox.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{\lg x}{\lg(x+2)}=\frac{1}{2}$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele distincte și impare.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(-5,2)$ și dreapta d de ecuație $y=x+1$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta d.
5p	**6.** Arătați că $\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=0$, pentru orice număr real x.

Soluții

Subiectul1

1. Considerăm $z=a+bi \quad , \quad a,b\in R$.

$2\overline{z}-z=2(a-bi)-(a+bi)=2a-2bi-a-bi=a-3bi$

$\Rightarrow a-3bi=1-3i$

Obținem $a=1$ și $b=1$ de unde $z=1+i$.

2. Parabola este tangentă la axa Ox dacă $\Delta=0$.

$\Delta=m^2-4$

$m^2-4=0$

de unde $m=2$ sau $m=-2$.

3. Condiții de existență $x>0$.

Ecuația dată este chivalentă cu $2\lg x=\lg(x+2)$

$\lg x^2=\lg(x+2)\Leftrightarrow x^2=x+2$

$x^2-x-2=0$

care are solutiile $x_1=2$ și $x_2=-1<0$.

Doar soluția $x_1=2$ verifică ecuația dată.

4. Probabilitatea unui eveniment se calculează cu formula $P=\frac{numarcazurifavorabile}{numarcazuriposibile}$

Numerele naturale de două cifre sunt 10,11,...,99 deci sunt 99-9=90 cazuri posibile.
Sunt 5 cifre impare 1,3,5,7,9 iar numerele formate cu două cifre diferite impare se calculează cu ajutorul aranjamentelor.

$A_5^2=\frac{5!}{(5-2)!}=\frac{5!}{3!}=4\cdot 5=20$

Probabilitatea cerută este $P=\frac{20}{90}=\frac{2}{9}$.

5. Fie d' dreapta care trece prin A și este perpendiculară pe dreapta d.

$m_d=1$

$d'\perp d\Rightarrow m_{d'}\cdot m_d=-1$

$\Rightarrow m_{d'}=-1$

Ecuația dreptei care trece prin punctul A și are panta $m_{d'}$ este dată de formula $y-y_0=m(x-x_0)$.

$y-2=-1(x+5)$

$\Rightarrow d':y=-x-3$

6. Folosim formulele

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$$
$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos x+\sin x\cos\frac{\pi}{4}-\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)=$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)=0,\forall x\in R$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $M(m)=\begin{pmatrix}2m & 1 & 1\\ 1 & 2m & 1\\ 1 & 1 & 2m\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2mx+y+z=-1\\ x+2my+z=0\\ x+y+2mz=1\end{cases}$, unde m este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(M(0))=2$.
5p	**b)** Determinați numerele reale m, știind că $\det(M(m))=0$.
5p	**c)** Pentru $m=-1$, demonstrați că, dacă (a,b,c) este o soluție a sistemului, cel mult unul dintre numerele a, b și c este întreg.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=4xy+3x+3y+\frac{3}{2}$.
5p	**a)** Demonstrați că $x*y=4\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(y+\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{4}$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Determinați numărul real x pentru care $x*x*x=-\frac{1}{2}$.
5p	**c)** Determinați numerele reale a, știind că $f(x)*f(y)=f(x+y)$, pentru orice numere reale x și y, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ae^x-\frac{3}{4}$.

<u>Subiectul 2</u>

1.a) $M(0)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

$$\det(M(0))=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{vmatrix}=0+1+1-0-0-0=2$$

b) $\det(M(m))=\begin{vmatrix}2m&1&1\\1&2m&1\\1&1&2m\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2m+2&2m+2&2m+2\\1&2m&1\\1&1&2m\end{vmatrix}=(2m+2)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2m&1\\1&1&2m\end{vmatrix}=$

$=(2m+2)(4m^2+1+1-2m-1-2m)=(2m+2)(4m^2-4m+1)=(2m+2)(2m-1)^2$

$(2m+2)(2m-1)^2=0$

Obținem soluțiile $m=-1$ și $m=\frac{1}{2}$.

c) $\begin{cases}-2x+y+z=-1\\ x-2y+z=0\\ x+y-2z=1\end{cases}$

Dacă (a,b,c) este soluție a sistemului atunci avem $\begin{cases}-2a+b+c=-1\\ a-2b+c=0\\ a+b-2c=1\end{cases}$

Scăzând prima ecuație din a doua obținem $a-b=\frac{1}{3}\notin Z$.

Scăzând a doua ecuație din a treia obținem $b-c=\frac{1}{3}\notin Z$.

Scăzând prima ecuație din a treia obținem $a-c=\frac{2}{3}\notin Z$.

Din egalitățile de mai sus rezultă că cel mult unul dintre numerele a,b,c este întreg.

2.a) $x*y=4xy+3x+3y+\frac{9}{4}-\frac{3}{4}=4\left(xy+\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}y+\frac{9}{16}\right)-\frac{3}{4}=4\left[x\left(y+\frac{3}{4}\right)+\frac{3}{4}\left(y+\frac{3}{4}\right)\right]-\frac{3}{4}=$

$=4\left(x+\frac{3}{4}\right)\left(y+\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{4},\forall x,y\in R$

b) $x*x=4\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{3}{4}$

$(x*x)*x=\left(4\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{3}{4}\right)*x=16\left(x+\frac{3}{4}\right)^3-\frac{3}{4}$

Obținem ecuația $16\left(x+\frac{3}{4}\right)^3-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}$

$\left(x+\frac{3}{4}\right)^3=\frac{1}{64}\Rightarrow x+\frac{3}{4}=\frac{1}{4}\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$

c) $f(x)*f(y)=\left(ae^x-\frac{3}{4}\right)*\left(ae^y-\frac{3}{4}\right)=4\left(ae^x-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)\left(ae^y-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{4}=4a^2e^{x+y}-\frac{3}{4}$

$f(x+y)=ae^{x+y}-\frac{3}{4}$

Obținem $4a^2e^{x+y}-\frac{3}{4}=ae^{x+y}-\frac{3}{4}, \forall x,y\in R$

$4a^2=a$

$a(4a-1)=0$

Rezultă $a=0$ sau $a=\frac{1}{4}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=8x^2-\ln x$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{(4x-1)(4x+1)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Demonstrați că punctul $A\left(\frac{2}{3},3\right)$ aparține tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că $f\left(\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)<f\left(\frac{1}{2}\right)$.
	2. Se consideră funcția $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+3}{x+3}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1 (x+3)f(x)dx=4$.
5p	**b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=2-3\ln\frac{4}{3}$.
5p	**c)** Pentru fiecare număr natural n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 e^x(x+3)^n(f(x))^n dx$. Demonstrați că $I_n+2nI_{n-1}=e\cdot 5^n-3^n$, pentru orice număr natural n, $n\geq 1$.

<u>Subiectul 3</u>

1.a) $f'(x)=\left(8x^2-\ln x\right)'=\left(8x^2\right)'-\left(\ln x\right)'=16x-\frac{1}{x}=\frac{16x^2-1}{x}=\frac{(4x-1)(4x+1)}{x}, x\in(0,+\infty)$

b) Ecuația tangentei la graficul unei funcții în punctul de pe grafic de abscisă x_0 este dată de formula

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

In cazul nostru avem $y-f(1)=f'(1)(x-1)$

$f(1)=8\cdot 1^2-\ln 1=8$

$f'(1)=\frac{(4\cdot 1-1)(4\cdot 1+1)}{1}=15$

Ecuația tangentei la grafic este $y-8=15(x-1)\Leftrightarrow y=15x-7$

Verificăm dacă punctul $A\left(\frac{2}{3},3\right)$ se află pe tangentă:

$3 = 15 \cdot \frac{2}{3} - 7 \Leftrightarrow 3 = 10 - 7$ adevărat, deci punctul $A\left(\frac{2}{3}, 3\right)$ aparține tangentei la graficul funcției în punctul de pe grafic de abscisă $x = 1$.

c) Tabelul de variație al funcției este:

x	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$	- - - - - - - - - - - -		0	+ + + + + + + + + + + + +	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Din tabel se observă că funcția este strict crescătoare pe intervalul $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

Cum $\frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{7}} < \frac{1}{2}$ deducem că $f\left(\frac{1}{3}\right) < f\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) < f\left(\frac{1}{2}\right)$.

2.a) $\int_0^1 (x+3) f(x)\,dx = \int_0^1 (x+3)\frac{2x+3}{x+3}\,dx = \int_0^1 (2x+3)\,dx = \left(x^2+3x\right)\Big|_0^1 = \left(1^2+3\cdot 1\right) - \left(0^2+3\cdot 0\right) = 4$

b) $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{2x+3}{x+3}\,dx = \int_0^1 \left(2 - \frac{3}{x+3}\right)dx = \left(2x - 3\ln(x+3)\right)\Big|_0^1 = (2 - 3\ln 4) - (2\cdot 0 - 3\ln 3) =$

$= 2 - 3\ln 4 + 3\ln 3 = 2 - 3(\ln 4 - \ln 3) = 2 - 3\ln\frac{4}{3}$

c) $I_n = \int_0^1 e^x (x+3)^n (f(x))^n\,dx = \int_0^1 e^x (x+3)^n \left(\frac{2x+3}{x+3}\right)^n dx = \int_0^1 e^x (2x+3)^n\,dx = \int_0^1 \left(e^x\right)' (2x+3)^n\,dx$

Folosim metoda de integrare prin părți și obținem:

$I_n = e^x (2x+3)^n\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x \left((2x+3)^n\right)' dx = e\cdot 5^n - 3^n - 2n\int_0^1 e^x (2x+3)^{n-1}\,dx = e\cdot 5^n - 3^n - 2nI_{n-1}$

Rezultă $I_n + 2nI_{n-1} = e\cdot 5^n - 3^n$ pentru orice număr natural $n \geq 1$.