Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)

Matematică *M_pedagogic*

Varianta 8

Filiera vocațională, profilul pedagogic, specializarea învățător-educatoare

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că $\sqrt{32}-\sqrt{18}-\sqrt{2}=0$.
5p	**2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=4-2x$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{5-3x}=25$.
5p	**4.** Determinați câte numere naturale pare de două cifre se pot forma cu cifrele 1, 2, 3, 4 și 5.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(5,3)$ și $C(5,6)$. Arătați că $AB=BC$.
5p	**6.** Arătați că $\sin 30^\circ+\sin 45^\circ\cdot\cos 45^\circ=1$.

Soluții

Subiectul1

1. $\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

$\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$\sqrt{32}-\sqrt{18}-\sqrt{2}=4\sqrt{2}-3\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$

2.Abscisa punctului de intersecție a graficelor se obține rezolvand ecuația $f(x)=g(x)$.

$x+1=4-2x$

$3x=3$

$x=1$

$f(1)=g(1)=2$

Punctul de intersecție al graficelor este $A(1,2)$

3. $5^{5-3x}=5^2$

$5-3x=2$

$-3x=-3$

$x=1$

4.Se observă că din enunț lipsește cuvantul "distincte".

Cifra unităților poate fi 2 sau 4.

Numerele care se termină in 2 sunt 12,22,32,42,52

Numerele care se termină in 4 sunt 14,24,34,44,54

In total se pot forma 10 numere pare de două cifre.

5.Distanța dintre două puncte se calculează cu formula $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$AB=\sqrt{(5-2)^2+(3-3)^2}=\sqrt{9+0}=3$

$BC=\sqrt{(5-5)^2+(6-3)^2}=\sqrt{0+9}=3$

$\Rightarrow AB=BC$

6. $\sin 30^0=\frac{1}{2}$

$\sin 45^0=\cos 45^0=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin 30^0+\sin 45^0\cdot\cos 45^0=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+x+y$.
5p	**1.** Arătaţi că $2015\circ(-1)=-1$.
5p	**2.** Demonstraţi că legea de compoziţie „$\circ$” este asociativă.
5p	**3.** Verificaţi dacă $e=0$ este element neutru al legii de compoziţie „$\circ$”.
5p	**4.** Arătaţi că $x\circ x=(x+1)^2-1$, pentru orice număr real x.
5p	**5.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x\circ x\circ x\circ x=0$.
5p	**6.** Arătaţi că $x\circ(x+1)\geq x$, pentru orice număr real x.

Subiectul 2

1. $2015\circ(-1)=2015\cdot(-1)+2015-1=-2015+2015-1=-1$

2. $(x\circ y)\circ z=(xy+x+y)\circ z=(xy+x+y)\cdot z+(xy+x+y)+z=xyz+xz+yz+xy+x+y+z,\forall x,y,z\in R$

$x\circ(y\circ z)=x\circ(yz+y+z)=x\cdot(yz+y+z)+x+(yz+y+z)=xyz+xy+xz+yz+x+y+z,\forall x,y,z\in R$

$\Rightarrow(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z),\forall x,y,z\in R$ deci legea de compoziţie dată este asociativă.

3. $x\circ 0=x\cdot 0+x+0=x$

$0\circ x=0\cdot x+0+x=x$

$\Rightarrow x\circ 0=0\circ x=x,\forall x\in R$

deci $e=0$ este element neutru.

4. $x\circ x=x\cdot x+x+x=x^2+2x=x^2+2x+1-1=(x+1)^2-1,\forall x\in R$

5. $x\circ x\circ x\circ x=\left[(x+1)^2-1\right]\circ\left[(x+1)^2-1\right]=\left[(x+1)^2-1+1\right]^2-1=(x+1)^4-1$

Se obţine ecuaţia $(x+1)^4-1=0$

$(x+1)^4=1$

$x+1=\pm 1$

Se obţin soluţiile $x_1=-2$ şi $x_2=0$.

6. $x\circ(x+1)=x(x+1)+x+(x+1)=x^2+3x+1=x^2+2x+1+x=\underbrace{(x+1)^2}_{+}+x\geq x,\forall x\in R$

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

Se consideră matricele $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ şi $A(a)=\begin{pmatrix}a&2\\1&a+1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **1.** Arătaţi că $\det(A(0))=-2$.

5p **2.** Determinaţi numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale inecuaţia $\det(A(a)-I_2)<0$.

5p **4.** Arătaţi că $(2a+1)A(a)-A(a)\cdot A(a)=(a^2+a-2)I_2$, pentru orice număr real a.

5p **5.** Determinaţi inversa matricei $A(2)$.

5p **6.** Determinaţi numerele naturale m pentru care $\det(A(m))\le 1$.

Subiectul 3

1. $A(0)=\begin{pmatrix}0&2\\1&1\end{pmatrix}$

$\det(A(0))=\begin{vmatrix}0&2\\1&1\end{vmatrix}=0-2=-2$

2. $\det(A(a))=\begin{vmatrix}a&2\\1&a+1\end{vmatrix}=a(a+1)-2=a^2+a-2$

$a^2+a-2=0$

$\Delta=1+8=9$

Rezultă $a_1=-2$ şi $a_2=1$

3. $A(a)-I_2=\begin{pmatrix}a&2\\1&a+1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a-1&2\\1&a\end{pmatrix}$

$\det(A(a)-I_2)=\begin{vmatrix}a-1&2\\1&a\end{vmatrix}=a(a-1)-2$

$a^2-a-2<0$

a	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
a^2-a-2	+ + + + +	0	- - - - -		-0	+ + + + +	

$\Rightarrow a\in(-1,2)$

4. $(2a+1)A(a)=(2a+1)\begin{pmatrix}a&2\\1&a+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a^2+a&4a+2\\2a+1&2a^2+3a+1\end{pmatrix}$

$A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}a&2\\1&a+1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&2\\1&a+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+2&4a+2\\2a+1&a^2+2a+3\end{pmatrix}$

$(2a+1)A(a)-A(a)\cdot A(a)=\begin{pmatrix}2a^2+a&4a+2\\2a+1&2a^2+3a+1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}a^2+2&4a+2\\2a+1&a^2+2a+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+a-2&0\\0&a^2+a-2\end{pmatrix}=$

$=(a^2+a-2)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=(a^2+a-2)I_2,\forall a\in R$

5. $A(2)=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

$\det\left(A(2)\right)=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}=6-2=4\neq 0$

Matricea transpusă este ${}^{t}A(2)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$

Matricea adjunctă este $A(2)^{*}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix}$

Matricea inversă se calculează cu formula $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\cdot A^{*}$

$\left(A(2)\right)^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{3}{4} & -\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$

6. $\det\left(A(m)\right)=\begin{vmatrix}m & 2\\ 1 & m+1\end{vmatrix}=m(m+1)-2$

$m^2+m-2\leq 1$

$m^2+m-3\leq 0$

Sunt doar două numere naturale care verifică inecuaţia şi anume $m=0$ şi $m=1$