Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Determinați termenul b_3 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1=1$ și rația $q=5$.
5p	**2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=4x-5$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficelor celor două funcții.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x}+x=4$.
5p	**4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\left\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots,\sqrt{49}\right\}$, acesta să fie număr natural.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-3,0)$ și $C(-3,6)$. Determinați ecuația medianei din A a triunghiului ABC.
5p	**6.** Arătați că $\sin x(3\sin x-\cos x)+\cos x(\sin x+3\cos x)=3$, pentru orice număr real x.

Soluții

Subiectul1

1. Formula termenului general al unei progresii geometrice este $b_n=b_1\cdot q^{n-1}$

Pentru $n=3$ rezultă $b_3=b_1\cdot q^2=1\cdot 5^2=25$

2. Abscisele punctelor de intersecție a graficelor a două funcții f,g se obțin rezolvând ecuația $f(x)=g(x)$.

Rezultă $x^2-x+1=4x-5$ de unde $x^2-5x+6=0$

$\Delta=25-24=1$

Se obțin soluțiile $x_1=2$ și $x_2=3$.

3. Condiții de existență $2x\geq 0\Leftrightarrow x\geq 0$

Pentru rezolvare avem:

$\sqrt{2x}=4-x\Rightarrow 2x=(4-x)^2\Rightarrow 2x=16-8x+x^2\Rightarrow x^2-10x+16=0$

$\Delta=100-64=36$

$x_1=\dfrac{10+6}{2}=8$ care nu convine

$x_2=\dfrac{10-6}{2}=2$ care convine.

4. $P=\dfrac{nr\_cazuri\_favorabile}{nr\_cazuri\_posibile}$

Mulțimea A are 49 de elemente deci avem 49 de cazuri posibile.

Numerele naturale din mulțimea A sunt $\sqrt{1},\sqrt{4},\sqrt{9},\sqrt{16},\sqrt{25},\sqrt{36},\sqrt{49}$ deci avem 7 cazuri favorabile.

$P=\dfrac{7}{49}=\dfrac{1}{7}$

5. Mijlocul unui segment este $M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

Mijlocul segmentului BC este $M\left(\frac{-3-3}{2},\frac{0+6}{2}\right)\Rightarrow M(-3,3)$

Ecuația medianei din A se află cu ajutorul unui determinant astfel:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow 3x+6-3y+9-3x-2y=0$$

Rezultă că $y=3$ este ecuația medianei din A.

6. $\sin x(3\sin x-\cos x)+\cos x(\sin x+3\cos x)=3\sin^2 x-\sin x\cos x+\sin x\cos x+3\cos^2 x=$

$=3(\sin^2 x+\cos^2 x)=3\cdot 1=3, \forall x\in\mathbb{R}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 4 \\ -4 & a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(-1))=17$.

5p **b)** Demonstrați că $A(2019-a)+A(2019+a)=2A(2019)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați perechile de numere reale x și y, pentru care $A(x)A(y)=2A(-8)$.

2. Pe mulţimea $G=(-2,2)$ se defineşte legea de compoziţie $x*y=\frac{4x+4y}{4+xy}$.

5p **a)** Arătați că 0 este elementul neutru al legii de compoziție „$*$”.

5p **b)** Determinați $x\in G$, pentru care $x*x=\frac{8}{5}$.

5p **c)** Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to G$, $f(x)=\frac{2(x-1)}{x+1}$. Demonstrați că $f(xy)=f(x)*f(y)$, pentru orice $x,y\in(0,+\infty)$.

Subiectul 2

1.a) $A(-1)=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$

$\det(A(-1))=\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}=(-1)\cdot(-1)-(-4)\cdot 4=1+16=17$

b) $A(2019-a)=\begin{pmatrix} 2019-a & 4 \\ -4 & 2019-a \end{pmatrix}$

$A(2019+a)=\begin{pmatrix} 2019+a & 4 \\ -4 & 2019+a \end{pmatrix}$

$A(2019-a)+A(2019+a)=\begin{pmatrix} 2019-a & 4 \\ -4 & 2019-a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2019+a & 4 \\ -4 & 2019+a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4038 & 8 \\ -8 & 4038 \end{pmatrix}=$

$=2\begin{pmatrix} 2019 & 4 \\ -4 & 2019 \end{pmatrix}=2A(2019), \forall a\in\mathbb{R}$

c) $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix} x & 4 \\ -4 & x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} y & 4 \\ -4 & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xy-16 & 4x+4y \\ -4x-4y & xy-16 \end{pmatrix}$

$2\cdot A(-8)=2\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -4 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -16 & 8 \\ -8 & -16 \end{pmatrix}$

Rezultă $\begin{pmatrix} xy-16 & 4x+4y \\ -4x-4y & xy-16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 & 8 \\ -8 & -16 \end{pmatrix}$

Obținem $\begin{cases} xy = 0 \\ x+y = 2 \end{cases}$

Soluțiile sistemului se obțin rezolvând ecuația $t^2 - St + P = 0$ unde $S = 2$ și $P = 0$

$t^2 - 2t = 0$ care are soluțiile $t_1 = 0$ și $t_2 = 2$

Perechile de numere x, y cerute sunt:

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$ și $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

2.a) $x * 0 = \dfrac{4x + 4\cdot 0}{4 + x\cdot 0} = \dfrac{4x}{4} = x, \forall x \in G$

$0 * x = \dfrac{4\cdot 0 + 4x}{4 + 0\cdot x} = \dfrac{4x}{4} = x, \forall x \in G$ deci 0 este elementul neutru al legii de compoziție $*$.

b) $x * x = \dfrac{4x + 4x}{4 + x\cdot x} = \dfrac{8x}{4 + x^2}$

Se obține ecuația $\dfrac{8x}{4+x^2} = \dfrac{8}{5} \Leftrightarrow 8x^2 + 32 = 40x \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$

$\Delta = 25 - 16 = 9$

$x_1 = 1 \in G$

$x_2 = 4 \notin G$

c) $f(xy) = \dfrac{2(xy-1)}{xy+1}, \forall x, y \in (0, +\infty)$

$$f(x) * f(y) = \frac{4f(x) + 4f(y)}{4 + f(x)f(y)} = \frac{\dfrac{8(x-1)}{x+1} + \dfrac{8(y-1)}{y+1}}{4 + \dfrac{2(x-1)}{x+1}\dfrac{2(y-1)}{y+1}} = \frac{8(x-1)(y+1) + 8(y-1)(x+1)}{4(x+1)(y+1) + 4(x-1)(y-1)} =$$

$$= \frac{2(x-1)(y+1) + 2(y-1)(x+1)}{(x+1)(y+1) + (x-1)(y-1)} = \frac{2xy + 2x - 2y - 2 + 2xy + 2y - 2x - 2}{xy + x + y + 1 + xy - x - y + 1} = \frac{4xy - 4}{2xy + 2} = \frac{4(xy-1)}{2(xy+1)} =$$

$$= \frac{2(xy-1)}{xy+1}, \forall x, y \in (0, +\infty)$$

Rezultă $f(xy) = f(x) * f(y), \forall x, y \in (0, +\infty)$.

Obs: De fapt funcția f este un izomorfism între grupurile $((0, +\infty), \cdot)$ și $(G, *)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-2x+2\ln(x+1)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{-2x}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\ln(1+\cos x)\le\cos x$, pentru orice $x\in(0,\pi)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+3}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_{-1}^{1} f(x)e^x dx=6$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe intervalul $[-3,+\infty)$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=n$ are aria egală cu $4-6e^{-n}$.

<u>**Subiectul 3**</u>

1.a) $f'(x)=\left[1-2x+2\ln(x+1)\right]'=-2+2\dfrac{(x+1)'}{x+1}=-2+\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{-2x-2+2}{x+1}=\dfrac{-2x}{x+1},\forall x\in(-1,+\infty)$.

b) Ecuația tangentei la graficul unei funcții în punctul de pe grafic de abscisă x_0 este dată de formula

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

În cazul nostru avem:

$y-f(0)=f'(0)(x-0)$

$f(0)=1-2\cdot0+2\ln(0+1)=1$

$f'(0)=\dfrac{-2\cdot0}{0+1}=0$

Se obține că ecuația tangentei cerute este $y=1$.

c) $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$

Tabelul de variație al funcției f este

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		+ + + + + + +	0	- - - - - - - - - - - -	
$f(x)$		$\nearrow$	1	$\searrow$	

Din tabel rezultă că $f(x)\le1$ pentru orice $x\in(-1,+\infty)$

$f(x)\le1\Leftrightarrow1-2x+2\ln(x+1)\le1\Leftrightarrow\ln(x+1)\le x,\forall x\in(-1,+\infty)$

$\cos x>-1$ pentru orice $x\in(0,\pi)$ deci $\ln(1+\cos x)\le\cos x,\forall x\in(0,\pi)$

2.a) $\int_{-1}^{1} f(x)e^x dx=\int_{-1}^{1}\dfrac{x+3}{e^x}e^x dx=\int_{-1}^{1}(x+3)\,dx=\left(\dfrac{x^2}{2}+3x\right)\Big|_{-1}^{1}=\left(\dfrac{1^2}{2}+3\cdot1\right)-\left(\dfrac{(-1)^2}{2}+3\cdot(-1)\right)=\dfrac{1}{2}+3-\dfrac{1}{2}+3=6$

b) Fie F o primitivă oarecare a funcției f

$F'(x)=f(x)=\dfrac{x+3}{e^x},\forall x\in\mathbb{R}$

$F'(x)=f(x)=\dfrac{x+3}{e^x}\geq 0,\forall x\in[-3,+\infty)$ deci F este crescătoare pe intervalul $[-3,+\infty)$.

c) Funcția f este pozitivă pe intervalul $[0,n]$

$Aria=\int_0^n\left|f(x)\right|dx=\int_0^n(x+3)e^{-x}dx=\int_0^n(x+3)\left(-e^{-x}\right)'dx=(x+3)\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^n-\int_0^n(x+3)'\left(-e^{-x}\right)dx=$

$=(n+3)\left(-e^{-n}\right)+3+\int_0^n e^{-x}dx=(n+3)\left(-e^{-n}\right)+3-e^{-x}\Big|_0^n=(n+3)\left(-e^{-n}\right)+3-e^{-n}+1=4-(n+4)e^{-n}$

Se obține egalitatea:

$4-(n+4)e^{-n}=4-6e^{-n}$

$n+4=6$

$n=2$