Ministerul Educaţiei şi Cercetării Ştiinţifice
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

Examenul de bacalaureat naţional 2015

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Se consideră numărul complex $z=1+i$. Arătaţi că $z^2-2i=0$.
5p	**2.** Calculaţi $(g\circ f)(3)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+2015$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x^2-5x}=5^{3-3x}$.
5p	**4.** Determinaţi numărul submulţimilor cu patru elemente ale mulţimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,4)$. Determinaţi ecuaţia dreptei d care trece prin punctul A şi este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y=2x+7$.
5p	**6.** Determinaţi aria triunghiului MNP, ştiind că $MN=12$, $MP=3$ şi $m(\sphericalangle M)=30^\circ$.

Soluţii

Subiectul1

1. $z^2=(1+i)^2=1^2+2i+i^2=1+2i-1=2i$

$z^2-2i=2i-2i=0$

2. $f(3)=0$

$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(0)=0+2015=2015$

3. $x^2-5x=3-3x$

$x^2-2x-3=0$

$\Delta=4+12=16$

Se obţin soluţiile $x_1=-1$ şi $x_2=3$

4. $C_5^4=\dfrac{5!}{4!(5-4)!}=\dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot1}=5$

5.Dreapta de ecuaţie $y=2x+7$ are panta $m=2$.

Două drepte sunt paralele dacă şi numai dacă au acceaşi pantă deci $m_d=2$

Ecuaţia unei drepte care trece printr-un punct dat şi are panta dată este dată de formula $y-y_0=m(x-x_0)$

$y-4=2(x-0)$

Ecuaţia dreptei d este $y=2x+4$

6. $Aria_{\Delta MNP}=\dfrac{MN\cdot MP\cdot\sin M}{2}=\dfrac{12\cdot3\cdot\sin30^0}{2}=6\cdot3\cdot\dfrac{1}{2}=9$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -a\\ -a & 1\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Determinați numerele reale a, pentru care $\det(A(a))=0$.

5p **c)** Arătați că $A(a)A(b)=A(a+b)+abI_2$, pentru orice numere reale a și b, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-mX+2$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0)=2$.

5p **b)** Determinați numărul real m, știind că restul împărțirii lui f la polinomul $g=X^2+X-2$ este egal cu 0.

5p **c)** Demonstrați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-6$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Subiectul 2

1.a) $\det(A(0))=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-0\cdot 0=1$

b) $\det(A(a))=\begin{vmatrix}1 & -a\\ -a & 1\end{vmatrix}=1-a^2$

$1-a^2=0$

$a=\pm 1$

c) $A(a)\cdot A(b)=\begin{pmatrix}1 & -a\\ -a & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -b\\ -b & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+ab & -a-b\\ -a-b & 1+ab\end{pmatrix}$

$A(a+b)=\begin{pmatrix}1 & -a-b\\ -a-b & 1\end{pmatrix}$

$abI_2=ab\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ab & 0\\ 0 & ab\end{pmatrix}$

$A(a+b)+abI_2=\begin{pmatrix}1 & -a-b\\ -a-b & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}ab & 0\\ 0 & ab\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+ab & -a-b\\ -a-b & 1+ab\end{pmatrix}=A(a+b),\forall a,b\in R$

2.a) $f(0)=0^3-m\cdot 0+2=2$

b) $X^2+X-2=(X-1)(X+2)$

Punem condiţia ca polinomul f să fie divizibil cu $(X-1)(X+2)$

Rezultă $f\,\vdots\,X-1$ şi $f\,\vdots\,X+2$

Conform teoremei lui Bezout obţinem că $f(1)=0$ şi $f(-2)=0$.

$f(1)=1^3-m\cdot 1+2=3-m=0$

$f(-2)=(-2)^3-m(-2)+2=-6+2m=0$

Din cele două condiţii se obţine aceeaşi soluţie $m=3$

c)

$f(x_1)=0 \Rightarrow x_1^3-mx_1+2=0$

$f(x_2)=0 \Rightarrow x_2^3-mx_2+2=0$

$f(x_3)=0 \Rightarrow x_3^3-mx_3+2=0$

Prin adunarea celor trei relaţii obţinem:

$x_1^3+x_2^3+x_3^3-m(x_1+x_2+x_3)+6=0$

Din relaţiile lui Viete avem $x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}=-\frac{0}{1}=0$

Inlocuind mai sus rezultă $x_1^3+x_2^3+x_3^3=-6, \forall m \in R$

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x-1$.
5p	**a)** Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$.
5p	**b)** Arătaţi că funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$.
5p	**c)** Demonstraţi că $e^x \geq x+1$, pentru orice număr real x.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+5$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_0^1 (f(x)+2x-5)\,dx=\frac{1}{3}$.
5p	**b)** Calculaţi $\int_0^2 \frac{f'(x)}{f(x)}dx$.
5p	**c)** Arătaţi că $\int_{2014}^{2015} \frac{1}{f(x)}dx \leq \frac{1}{4}$.

Subiectul 3

1.a) $f'(x)=(e^x-x-1)'=(e^x)'-x'-1'=e^x-1, x\in R$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=e^0-1=0$

b) $f'(x)=0 \Rightarrow e^x-1=0 \Rightarrow e^x=1 \Rightarrow x=0$

Tabelul de variaţie al funcţiei este:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		- - - - - - - - - -	0	+ + + + + + + + + + +	
f(x)		↘	0	↗	

Din tabel rezultă că funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty,0]$.

c)Din tabelul de variaţie al funcţiei f rezultă că

$f(x)\geq 0, x\in R$

$e^x-x-1\geq 0, x\in R$

$e^x\geq x+1, x\in R$

2.a) $\int_0^1 \left(f(x) + 2x - 5 \right) dx = \int_0^1 \left(x^2 - 2x + 5 + 2x - 5 \right) dx = \int_0^1 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$

b) $\int_0^2 \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln \left| f(x) \right| \Big|_0^2 = \ln \left| x^2 - 2x + 5 \right| \Big|_0^2 = \ln 5 - \ln 5 = 0$

c) $f(x) = x^2 - 2x + 1 + 4 = (x-1)^2 + 4 \geq 4, \forall x \in R$

Funcţia f este pozitivă pe **R**.

$\frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{4}, \forall x \in R$

$\int_{2014}^{2015} \frac{1}{f(x)} dx \leq \int_{2014}^{2015} \frac{1}{4} dx = \left. \frac{1}{4} x \right|_{2014}^{2015} = \frac{1}{4}(2015 - 2014) = \frac{1}{4}$

Obs:De fapt in general avem $\int_a^{a+1} \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{1}{4}, \forall a \in R$