Examenul de bacalaureat naţional 2015
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

Varianta 8

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătaţi că $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{20}{7}=2$.
5p	**2.** Determinaţi numărul real a, ştiind că punctul $A(a,0)$ aparţine graficului funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-2$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{x+3}=4$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $M=\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$, acesta să fie multiplu de 15.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,2)$ şi $B(4,6)$. Determinaţi coordonatele mijlocului segmentului AB.
5p	**6.** Arătaţi că $\sin x=\frac{12}{13}$, ştiind că $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ şi $\cos x=\frac{5}{13}$.

Soluţii

Subiectul1

1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}=\frac{5}{10}+\frac{2}{10}=\frac{7}{10}$

$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{20}{7}=\frac{7}{10}\cdot\frac{20}{7}=2$

2.Punem condiţia $f(a)=0$

$a-2=0\Rightarrow a=2$

3.Punem condiţii de existenţă $x+3\geq 0\Leftrightarrow x\geq -3$

Prin ridicarea ambilor membri la pătrat obţinem:

$x+3=16$

$x=13$

care verifică ecuaţia dată.

4.Probabilitatea unui eveniment se calculează cu formula

$$P=\frac{nrcazurifavorabile}{nrcazuriposibile}$$

In mulţimea M sunt 9 elemente deci sunt 9 cazuri posibile.

Numerele 30,60,90 sunt divizibile cu 15 deci sunt 3 cazuri favorabile.

$P=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$

5.Mijlocul unui segment este $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$M\left(\frac{4+4}{2},\frac{2+6}{2}\right)\Rightarrow M(4,4)$

6.Se foloseşte formula fundamentală a trigonometriei $\sin^2 x+\cos^2 x=1,\forall x\in R$

$\sin^2 x+\left(\frac{5}{13}\right)^2=1$

$\sin^2 x+\frac{25}{169}=1$

$\sin^2 x=1-\frac{25}{169}$

$\sin^2 x=\frac{169}{169}-\frac{25}{169}$

$\sin^2 x=\frac{144}{169}\Rightarrow \sin x=\pm\sqrt{\frac{144}{169}}=\pm\frac{12}{13}$

Deoarece x este in primul cadran rezultă că avem $\sin x=\frac{12}{13}$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}$ şi $C=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătaţi că $\det A=-2$.

5p **b)** Arătaţi că $A+B=5C$.

5p **c)** Demonstraţi că $AB+BA+4I_2=25C$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy+4x+4y+12$.

5p **a)** Arătaţi că $5\circ(-4)=-4$.

5p **b)** Arătaţi că $x\circ y=(x+4)(y+4)-4$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x\circ x=x$.

Subiectul 2

1.a) $\det A=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=4-6=-2$

b) $A+B=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&5\\5&5\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=5C$

c)

$AB=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&5\\20&13\end{pmatrix}$

$BA=\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&20\\5&8\end{pmatrix}$

$4I_2=4\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}$

$AB+BA+4I_2=\begin{pmatrix}8&5\\20&13\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}13&20\\5&8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25&25\\25&25\end{pmatrix}=25\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=25C$

2.a) $5\circ(-4)=5\cdot(-4)+4\cdot5+4\cdot(-4)+12=-20+20-16+12=-4$

b) $x\circ y=xy+4x+4y+12=xy+4x+4y+16-4=x(y+4)+4(y+4)-4=(x+4)(y+4)-4,\forall x,y\in R$

c) $x\circ x=x\cdot x+4x+4x+12=x^2+8x+12$

$x^2+8x+12=x$

$x^2+7x+12=0$

$\Delta=b^2-4ac=49-48=1$

Se obţin soluţiile $x_1=-3$ şi $x_2=-4$

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3+3x^2+5$.
5p	**a)** Arătaţi că $f'(x)=6x(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)-2x^3}$.
5p	**c)** Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.
	2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x^3+3x^2$.
5p	**a)** Arătaţi că $\int_1^2\left(f(x)-3x^2\right)dx=15$.
5p	**b)** Determinaţi primitiva F a funcţiei f pentru care $F(1)=2015$.
5p	**c)** Determinaţi numărul natural n, $n>1$, ştiind că $\int_1^n\dfrac{f(x)}{x^2}dx=9$.

Subiectul 3

1.a) $f'(x)=\left(2x^3+3x^2+5\right)'=\left(2x^3\right)'+\left(3x^2\right)'+5'=2\cdot3x^2+3\cdot2x=6x^2+6x=6x(x+1),x\in R$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)-2x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x(x+1)}{3x^2+5}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x^2+6x}{3x^2+5}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(6x^2+6x\right)'}{\left(3x^2+5\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{12x+6}{6x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(12x+6)'}{(6x)'}=\dfrac{12}{6}=2$

c)Se rezolvă ecuaţia $f'(x)=0$

$6x(x+1)=0$ care are soluţiile $x_1=-1$ şi $x_2=0$

Tabelul de variaţie al funcţiei este:

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f'(x)		+ + + + + +	0	- - - - - - -	0	+ + + + + + + +	
f(x)		↗		↘		↗	

Din tabel rezultă că funcţia f este crescătoare pe intervalele $(-\infty,-1)$ şi $(0,+\infty)$ şi este descrescătoare pe intervalul $(-1,0)$.

2.a) $\int_1^2\left(f(x)-3x^2\right)dx=\int_1^2\left(4x^3+3x^2-3x^2\right)dx=\int_1^2 4x^3dx=4\int_1^2 x^3dx=4\left.\dfrac{x^4}{4}\right|_1^2=\left.x^4\right|_1^2=2^4-1^4=16-1=15$

b)Mulţimea primitivelor funcţiei f este dată de integrala nedefinită a funcţiei f.

$\int f(x)dx = \int \left(4x^3 + 3x^2\right)dx = 4\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3} + C = x^4 + x^3 + C$

O primitivă oarecare este $F : R \to R$ prin formula $F(x) = x^4 + x^3 + c$

Pentru a obţine primitiva căutată punem condiţia $F(1) = 2015$

$1 + 1 + c = 2015$

$c = 2013$

Se obţine $F(x) = x^4 + x^3 + 2013$

c)

$\int_1^n \frac{f(x)}{x^2}dx = \int_1^n \frac{4x^3 + 3x^2}{x^2}dx = \int_1^n \frac{x^2(4x+3)}{x^2}dx = \int_1^n (4x+3)dx = \left(2x^2 + 3x\right)\Big|_1^n = \left(2n^2 + 3n\right) - \left(2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1\right) = 2n^2 + 3n - 5$

$2n^2 + 3n - 5 = 9$

$2n^2 + 3n - 14 = 0$

$\Delta = 9 + 112 = 121$

$n_1 = \frac{-3-11}{4} = -\frac{7}{2} \notin N$

$n_2 = \frac{-3+11}{4} = 2 \in N$

In concluze avem $n = 2$