Ministerul Educaţiei Naţionale
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

Examenul de bacalaureat naţional 2017
Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Varianta 2

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătaţi că $\left(2+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{4}{5}=2$.
5p	**2.** Arătaţi că $\frac{x_1+x_2-1}{x_1x_2}=1$, unde x_1 şi x_2 sunt soluţiile ecuaţiei $x^2-4x+3=0$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{x+1}=8$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulţimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să fie multiplu de 4.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$ şi $B(4,0)$. Calculaţi perimetrul triunghiului OAB.
5p	**6.** Arătaţi că $\sin^2 150°+\sin^2 60°=1$.

Soluţii

Subiectul1

1. $\left(\frac{2}{1}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{4}{5}=\left(\frac{4}{2}+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{4}{5}=\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{5}=2$

2. Se folosesc relaţiile lui Viete:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{-4}{1}=4 \\ x_1x_2=\frac{c}{a}=\frac{3}{1}=3 \end{cases}$$

$$\frac{x_1+x_2-1}{x_1x_2}=\frac{4-1}{3}=\frac{3}{3}=1$$

3. $2^{x+1}=2^3$

$x+1=3\Rightarrow x=2$

4. $P=\frac{nr.cazurifavorabile}{nr.cazuriposibile}$

Mulţimea A are 9 elemente deci sunt 9 cazuri posibile

4 şi 8 sunt multipli de 4 deci sunt două cazuri favorabile

$P=\frac{2}{9}$

5. $P_{\Delta AOB}=AB+AO+BO$

Distanţa dintre două puncte in plan se calculează cu formula $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$AB=\sqrt{(4-0)^2+(0-3)^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

$AO=3, BO=4$

$P_{\Delta AOB}=5+3+4=12$

6. $\sin 150^0=\frac{1}{2}$, $\sin 60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (vezi http://variante-mate.ro/descarca/sinus)

$\sin^2 150^0+\sin^2 60^0=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{4}{4}=1$

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătaţi că $\det A=5$.

5p **b)** Determinaţi numărul real a pentru care $B\cdot B=2B$.

5p **c)** Arătaţi că $\det(A\cdot B-B\cdot A)\geq 0$, pentru orice număr real a.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=xy-3x-3y+12$.

5p **a)** Arătaţi că $1\circ 3=3$.

5p **b)** Demonstraţi că $x\circ y=(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x şi y.

5p **c)** Determinaţi numărul real x, pentru care $(x\circ x)\circ x=3$.

Subiectul 2

1.a) $\det A=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}=3\cdot 3-2\cdot 2=9-4=5$

b) $B\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & a+1\\ a+1 & a^2+1\end{pmatrix}$

$2B=2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2a\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}2 & a+1\\ a+1 & a^2+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2a\end{pmatrix}$

$\begin{cases}a+1=2\\ a^2+1=2a\end{cases}\Rightarrow a=1$

c) $A\cdot B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 3+2a\\ 5 & 2+3a\end{pmatrix}$

$B\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 3+2a & 2+3a\end{pmatrix}$

$A\cdot B-B\cdot A=\begin{pmatrix}5 & 3+2a\\ 5 & 2+3a\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5 & 5\\ 3+2a & 2+3a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2a-2\\ 2-2a & 0\end{pmatrix}$

$\det(A\cdot B-B\cdot A)=\begin{vmatrix}0 & 2a-2\\ 2-2a & 0\end{vmatrix}=-(2-2a)(2a-2)=(2a-2)(2a-2)=(2a-2)^2\geq 0,\forall a\in R$

2.a) $1\circ 3=1\cdot 3-3\cdot 1-3\cdot 3+12=3-3-9+12=3$

b) $x\circ y=xy-3x-3y+9+3=x(y-3)-3(y-3)+3=(x-3)(y-3)+3,\forall x,y\in R$

c) Calculăm $x\circ x$ şi $(x\circ x)\circ x$ cu formula demonstrată la punctul b)

$x\circ x=(x-3)^2+3$

$(x\circ x)\circ x=\left[(x-3)^2+3\right]\circ x=(x-3)^3+3$

Se obţine ecuaţia $(x-3)^3+3=3$

$(x-3)^3=0\Leftrightarrow x-3=0\Leftrightarrow x=3$

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^3+6x+2$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=3\left(x^2+2\right),\ x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătaţi că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x+2}=3$.

5p **c)** Demonstraţi că $-5\le f(x)\le 9$, pentru orice $x\in[-1,1]$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4x^3-x$.

5p **a)** Arătaţi că $\int\limits_0^1\left(f(x)+x\right)dx=1$.

5p **b)** Arătaţi că $\int\limits_0^1\left(4x^3-f(x)\right)e^x dx=1$.

5p **c)** Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei f, axa Ox şi dreptele de ecuaţii $x=1$ şi $x=3$.

Subiectul 3

1.a) $f'(x)=\left(x^3+6x+2\right)'=\left(x^3\right)'+(6x)'+2'=3x^2+6=3\left(x^2+2\right),x\in R$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x+2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\left(x^2+2\right)}{x+2}=\frac{3\left(0^2+2\right)}{0+2}=\frac{3\cdot 2}{2}=3$

c) $f'(x)=3\left(x^2+2\right)>0,\forall x\in R$ deci funcţia dată este crescătoare pe **R**

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+ + + + + +	+ + + + + +	+ + + + + + +	
$f(x)$	$\nearrow$	-5 $\nearrow$	9 $\nearrow$	

$f(-1)=(-1)^3+6(-1)+2=-1-6+2=-5$

$f(1)=1^3+6\cdot 1+2=1+6+2=9$

Din tabel rezultă că dacă $x\in[-1,1]$ atunci $-5\le f(x)\le 9$

2.a) $\int_0^1\left(f(x)+x\right)dx=\int_0^1\left(4x^3-x+x\right)dx=\int_0^1 4x^3dx=4\int_0^1 x^3dx=4\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1=\left.x^4\right|_0^1=1^4-0^4=1$

b) $\int_0^1\left(4x^3-f(x)\right)e^xdx=\int_0^1\left(4x^3-4x^3+x\right)e^xdx=\int_0^1 xe^xdx=\int_0^1 x\left(e^x\right)'dx=$

se foloseşte metoda integrării prin părţi pentru integrale definite şi se obţine:

$= xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 x' e^x dx = e - \int_0^1 e^x dx = e - e^x\Big|_0^1 = e - (e-1) = 1$

c) Funcția dată $f(x) = 4x^3 - x = x(4x^2 - 1) = \underset{+}{x}\underbrace{(2x-1)}_{+}\underbrace{(2x+1)}_{+}$ este pozitivă pe intervalul $[1,3]$.

$$Aria = \int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 (4x^3 - x)dx = \left(4\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 = \left(x^4 - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 = \left(3^4 - \frac{3^2}{2}\right) - \left(1^4 - \frac{1^2}{2}\right) = \left(81 - \frac{9}{2}\right) - \frac{1}{2} = 81 - \frac{10}{2} = 76$$