Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Calculați modulul numărului complex $z=(2-i)(3+2i)-4(1+i)$.
5p	**2.** Determinați valorile reale ale lui m pentru care $x^2-(2m+1)x+m(m-1)\geq 0$, pentru orice număr real x.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\log_2 x-\log_x 2=1$.
5p	**4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi A, știind că mulțimea A are exact 16 submulțimi cu cel mult două elemente.
5p	**5.** Se consideră triunghiul ABC, punctul M mijlocul laturii BC și punctul N mijlocul segmentului AM. Demonstrați că $2\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$.
5p	**6.** Determinați $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, știind că $1+3\cos x=\cos 2x$.

Soluții

Subiectul1

1. $z=6+4i-3i-2i^2-4-4i=4-3i$ deoarece $i^2=-1$.

$|z|=|4-3i|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$

2. Punem condiția $\Delta\leq 0$.

$\Delta=\left[-(2m+1)\right]^2-4m(m-1)=4m^2+4m+1-4m^2+4m=8m+1$

$8m+1\leq 0\Leftrightarrow m\leq -\frac{1}{8}\Leftrightarrow m\in\left(-\infty,-\frac{1}{8}\right]$.

3. Punem condiții de existență

$\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$

Folosim formula $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ și ecuația dată devine:

$2\log_2 x-\frac{1}{\log_2 x}=1$

Facem notația $\log_2 x=y$

$2y-\frac{1}{y}=1\Rightarrow 2y^2-y-1=0$ care are soluțiile $y_1=1$ și $y_2=-\frac{1}{2}$.

Revenim la notația făcută:

$\log_2 x = 1 \Rightarrow x = 2$

$\log_2 x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

4. Fie n numărul de elemente ale mulțimii A.

Mulțimea A are $C_n^0 = 1$ submulțimi cu 0 elemente (mulțimea vidă).

Mulțimea A are $C_n^1 = n$ submulțimi cu 1 element.

Mulțimea A are $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$ submulțimi cu 2 elemente.

Se obține relația

$1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 16$

$2 + 2n + n^2 - n = 32 \Rightarrow n^2 + n - 30 = 0$

$\Delta = 1 + 120 = 121$ și se obține o singură soluție număr natural $n = 5$.

5. Din faptul că M este mijlocul segmentului BC rezultă egalitatea vectorială:

$\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{NM} \Rightarrow -\overrightarrow{BN} - \overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{NM}$

N este mijlocul segmentului AM deci $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{AN}$

$\Rightarrow 2\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN} = \vec{0}$

6. Folosim formula $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$1 + 3\cos x = 2\cos^2 x - 1$ de unde $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$

Facem notația $\cos x = t$ și obținem $2t^2 - 3t - 2 = 0$

$\Delta = 25$

Se obțin soluțiile $t_1 = 2$ și $t_2 = -\frac{1}{2}$.

Revenim la notația făcută:

$\cos x = 2$ nu are soluții deoarece $\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$

$\cos x = -\frac{1}{2}$ are soluția $x = \frac{2\pi}{3}$ în intervalul $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 2 & a & 4 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 4z = 3 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a)) = a(3-a)$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Pentru $a = 0$, demonstrați că sistemul de ecuații este incompatibil.

5p **c)** Determinați numerele întregi a pentru care sistemul de ecuații are soluție unică (x_0, y_0, z_0) și x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi.

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x \circ y = \sqrt{x^2y^2 + x^2 + y^2}$.

5p **a)** Demonstrați că $x \circ y = \sqrt{(x^2+1)(y^2+1) - 1}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați perechile de numere naturale a și b, știind că $a \circ b = 1$.

5p **c)** Demonstrați că pentru orice număr natural n, $n \geq 2$, numărul $\underbrace{1 \circ 1 \circ \ldots \circ 1}_{1 \text{ de } n \text{ ori}}$ **nu** este natural.

Subiectul 2

1.a) $\det(A(a))=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&a\\2&a&4\end{vmatrix}=8+a+2a-4-a^2-4=3a-a^2=a(3-a)$ pentru orice număr real a.

b) $\det(A(0))=0(3-0)=0$

Un minor principal este $\begin{vmatrix}1&1\\1&2\end{vmatrix}=2-1=1\neq 0$

Determinantul caracteristic este $\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&2\\2&0&3\end{vmatrix}=6+0+4-4-0-3=3\neq 0$ deci sistemul dat este incompatibil dacă a=0

c) Sistemul dat are soluție unică dacă și numai dacă $\det(A(a))\neq 0 \quad \Rightarrow a\in\mathbb{Z}\setminus\{0,3\}$

În acest caz sistemul se rezolvă cu formulele lui Cramer.

$$d_1=\begin{vmatrix}1&1&1\\2&2&a\\3&a&4\end{vmatrix}=8+2a+3a-6-a^2-8=-a^2+5a-6=(3-a)(a-2)$$

$$d_2=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&a\\2&3&4\end{vmatrix}=8+3+2a-4-3a-4=3-a$$

$$d_3=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&2\\2&a&3\end{vmatrix}=6+a+4-4-2a-3=3-a$$

$$\begin{cases}x_0=\dfrac{d_1}{\det A}=\dfrac{(3-a)(a-2)}{a(3-a)}=\dfrac{a-2}{a}=1-\dfrac{2}{a}\\ y_0=\dfrac{d_2}{\det A}=\dfrac{3-a}{a(3-a)}=\dfrac{1}{a}\\ z_0=\dfrac{d_3}{\det A}=\dfrac{3-a}{a(3-a)}=\dfrac{1}{a}\end{cases}$$

x_0, y_0, z_0 sunt numere întregi deci $\dfrac{1}{a}$ este întreg și cum a este întreg rezultă $a=1$ sau $a=-1$.

2.a) $x\circ y=\sqrt{x^2y^2+x^2+y^2+1}-1=\sqrt{x^2(y^2+1)+y^2+1}-1=\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}-1, \forall x,y\in\mathbb{R}$

b) $a\circ b=1\Leftrightarrow\sqrt{(a^2+1)(b^2+1)}-1=1\Leftrightarrow\underbrace{(a^2+1)}_{\in\mathbb{N}}\underbrace{(b^2+1)}_{\in\mathbb{N}}=2$

Rezultă $\begin{cases}a^2+1=1\\b^2+1=2\end{cases}\overset{a,b\in\mathbb{N}}{\Rightarrow}\begin{cases}a=0\\b=1\end{cases}$ sau $\begin{cases}a^2+1=2\\b^2+1=1\end{cases}\overset{a,b\in\mathbb{N}}{\Rightarrow}\begin{cases}a=1\\b=0\end{cases}$

c) $1\circ 1=\sqrt{3}=\sqrt{2^2-1}$

$(1\circ 1)\circ 1=\sqrt{3}\circ 1=\sqrt{7}=\sqrt{2^3-1}$

Demonstrăm prin inducție matematică propoziția

$P(n):\underbrace{1\circ 1\circ\ldots\circ 1}_{1\_de\_n\_ori}=\sqrt{2^n-1}\quad,\quad n\geq 2$

Etapa verificării

Pentru $n=2$ avem $1\circ 1=\sqrt{3}=\sqrt{2^2-1}$

Etapa demonstrației

$P(k):\underbrace{1\circ 1\circ\ldots\circ 1}_{1\_de\_k\_ori}=\sqrt{2^k-1}$ o presupunem adevărată

$P(k+1):\underbrace{1\circ 1\circ\ldots\circ 1}_{1\_de\_k+1\_ori}=\sqrt{2^{k+1}-1}$ trebuie demonstrată

$\underbrace{(1\circ 1\circ\ldots\circ 1)}_{1\_de\_k\_ori}\circ 1=\left(\sqrt{2^k-1}\right)\circ 1=\sqrt{\left(\sqrt{2^k-1}\right)^2\cdot 1^2+\left(\sqrt{2^k-1}\right)^2+1^2}=\sqrt{2^k-1+2^k-1+1}=\sqrt{2\cdot 2^k-1}=\sqrt{2^{k+1}-1}$ și

metoda inducției matematice se termină aici.

Mai departe, presupunem prin reducere la absurd că $\sqrt{2^n-1}=k\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow 2^n-1=k^2$ deci k este impar și are forma $k=2m+1$, $m\in\mathbb{N}$

$2^n-1=(2m+1)^2$

$2^n-1=4m^2+4m+1$

$2^n=4m^2+4m+2$

$2^{n-1}=2m^2+2m+1, n\geq 2$

S-a ajuns la o contradicție deoarece membrul stâng este par iar membrul drept este impar.

Deducem că $\underbrace{1\circ 1\circ\ldots\circ 1}_{1\_de\_n\_ori}$ nu este natural pentru $n\geq 2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2x+2}-x+1$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x+1-\sqrt{x^2+2x+2}}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $-\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Determinați imaginea funcției f.
	2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln(x+1)$.
5p	**a)** Calculați $\int_1^2 \dfrac{(3x-2)f(x)}{\ln(x+1)}dx$.
5p	**b)** Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=\dfrac{1}{4}$.
5p	**c)** Calculați $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t^3}\int_0^t f(x)dx$.

Subiectul 3

1.a) $f'(x)=\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x+1\right)'=\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)'-x'+1'=\dfrac{\left(x^2+2x+2\right)'}{2\sqrt{x^2+2x+2}}-1=\dfrac{2(x+1)}{2\sqrt{x^2+2x+2}}-1=$

$=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}-1=\dfrac{x+1-\sqrt{x^2+2x+2}}{\sqrt{x^2+2x+2}}, x\in\mathbb{R}$

b) Ecuația asimptotei oblice este $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x+2}-x+1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}-x+1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-x+1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-1+\frac{1}{x}\right)=-2$$

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+2x+2}-x+1+2x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+2x+2}+x+1\right]\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x+2-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x+2}-x-1}=$$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+2}-x-1}=\dfrac{1}{+\infty+\infty}=0$ deci dreapta de ecuație $y=-2x$ este asimptotă oblică spre $-\infty$ la graficul funcției f.

c) $f'(x)=0\Rightarrow x+1-\sqrt{x^2+2x+2}=0\Rightarrow x+1=\sqrt{x^2+2x+2}\Rightarrow x^2+2x+1=x^2+2x+2$ de unde rezultă că ecuația $f'(x)=0$ nu are soluții.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x+1\right)=+\infty+\infty=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x+1\right)\overset{(\infty-\infty)}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2x+2-x^2}{\sqrt{x^2+2x+2}+x}+1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}+x}+1\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\left(2+\frac{2}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)}+1\right)=2$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$	- -		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2

Funcția dată este continuă pe $\mathbb{R}$.
Din tabel rezultă că $\operatorname{Im} f=(2,+\infty)$

2.a)

$$\int_1^2\frac{(3x-2)f(x)}{\ln(x+1)}dx=\int_1^2\frac{(3x-2)x\ln(x+1)}{\ln(x+1)}dx=\int_1^2\left(3x^2-2x\right)dx=\left(x^3-x^2\right)\Big|_1^2=\left(2^3-2^2\right)-\left(1^3-1^2\right)=8-4-0=4$$

b) Se folosește metoda integrării prin părți.

$$\int_0^1 x\ln(x+1)dx=\int_0^1\left(\frac{x^2-1}{2}\right)'\ln(x+1)dx=\underbrace{\frac{x^2-1}{2}\ln(x+1)\Big|_0^1}_{0}-\int_0^1\frac{x^2-1}{2}\left[\ln(x+1)\right]'dx=-\frac{1}{2}\int_0^1\left(x^2-1\right)\cdot\frac{1}{x+1}dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1(x-1)dx=-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_0^1=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{1}{4}$$

c) $\displaystyle\lim_{t\to0}\frac{\int_0^t f(x)dx}{t^3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{t\to0}\frac{\left(\int_0^t f(x)dx\right)'}{\left(t^3\right)'}=\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{3t^2}=\lim_{t\to0}\frac{t\ln(t+1)}{3t^2}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(t+1)}{3t}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{t\to0}\frac{\left(\ln(t+1)\right)'}{(3t)'}=\lim_{t\to0}\frac{1}{3(t+1)}=\frac{1}{3}$