Ministerul Educației și Cercetării
Centrul Național de Politici și Evaluare în Educație

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că numărul $N=\log_2 6-2\log_2 3+\log_2 24$ este natural.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x+2$. Arătați că dreapta de ecuație $y=2$ intersectează graficul funcției f în două puncte distincte.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-5}=\sqrt{3x-1}$.
5p	**4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi A, știind că mulțimea A are exact 15 submulțimi cu două elemente.
5p	**5.** Se consideră triunghiul ABC și punctele M, N și P mijloacele segmentelor BC, BM, respectiv CM. Arătați că $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AP}=\frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.
5p	**6.** Determinați $x\in(0,\pi)$, știind că $\sin 2x+2\sin^2 x=0$.

Soluții

Subiectul1

1. $N=\log_2 6-2\log_2 3+\log_2 24=\log_2 6-\log_2 9+\log_2 24=\log_2\frac{6}{9}+\log_2 24=\log_2\left(\frac{6\cdot 24}{9}\right)=\log_2 16=4\in N$

2. Pentru a afla coordonatele punctelor de intersecție dintre dreapta de ecuație y=2 si parabolă, rezolvăm sistemul

$$\begin{cases} y=x^2-x+2 \\ y=2 \end{cases}$$

$\Rightarrow x^2-x+2=2$

$x^2-x=0$

care are soluțiile $x_1=0$ și $x_2=1$.

Punctele de intersecție dintre dreaptă și parabolă sunt $A(0,2)$ și $B(1,2)$.

3. Punem condiții de existență:

$$\begin{cases} x^2-5\geq 0 \\ 3x-1\geq 0 \end{cases}$$

Pentru rezolvarea ecuației se ridică la pătrat ambii membri:

$x^2-5=3x-1$

$x^2-3x-4=0$

$\Delta=9+16=25$

Obținem $x_1=-1$ care nu convine și $x_2=4$ care convine.

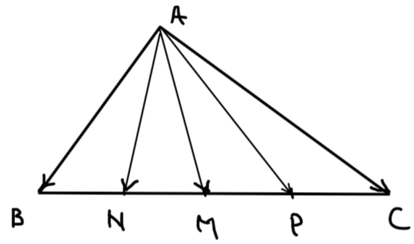
4. Fie n numărul de elemente ale mulțimii A.

Mulțimea A are C_n^2 submulțimi cu două elemente.

Rezultă $C_n^2 = 15$

$\frac{n!}{2!\cdot(n-2)!} = 15 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 15 \Leftrightarrow n^2 - n - 30 = 0$ care are o singură soluție care convine și anume $n = 6$ deci mulțimea A are 6 elemente.

5.



M este mijlocul segmentului BC deci $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$.

M este mijlocul segmentului NP deci $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP}\right)$ de unde rezultă $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AM}$

$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

6. Pentru rezolvare folosim formula $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

Ecuația dată devine:

$2\sin x \cos x + 2\sin^2 x = 0$

$2\sin x(\cos x + \sin x) = 0$

Dacă $x \in (0,\pi)$ avem $\sin x \neq 0$.

$\Rightarrow \cos x + \sin x = 0$

$\sin x = -\cos x$

$tgx = -1$

Cum $x \in (0,\pi)$ rezultă $x = \frac{3\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{pmatrix}$, unde a, b și c sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(0,1,2)\right) = 2$.

5p **b)** Demonstrați că $\det\left(A(a,b,c)\right) = (b-a)(c-a)(c-b)$, pentru orice numere reale a, b și c.

5p **c)** Demonstrați că, dacă m, n și p sunt numere naturale, cu $m < n < p$, astfel încât determinantul matricei $A(m,n,p)$ este număr prim, atunci numerele m, n și p sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

2. În mulțimea $\mathbb{Z}_3[X]$, se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 + \hat{2}X + b$, unde $a, b \in \mathbb{Z}_3$.

5p **a)** Pentru $a = \hat{1}$ și $b = \hat{2}$, arătați că $f(\hat{0}) + f(\hat{2}) = \hat{2}$.

5p **b)** Determinați perechile (a,b), cu $a,b \in \mathbb{Z}_3$, pentru care polinomul f este divizibil cu $X + \hat{2}$.

5p **c)** Arătați că, pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}_3$, există $x, y \in \mathbb{Z}_3$, cu $x \neq y$, astfel încât $f(x) = f(y)$.

Subiectul 2

1.a) $A(0,1,2)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$\det(A(0,1,2))=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 0\end{vmatrix}=0+0+4-2-0-0=2$.

b) Scădem prima coloană din ultimele două apoi dezvoltăm determinantul după prima linie:

$\det(A(a,b,c))=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ bc & ac & ab\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ a & b-a & c-a\\ bc & c(a-b) & b(a-c)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}b-a & c-a\\ c(a-b) & b(a-c)\end{vmatrix}=$

$=(b-a)(c-a)\begin{vmatrix}1 & 1\\ -c & -b\end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)$ pentru orice numere reale a,b,c.

c) Fie m,n,p numere naturale cu $m<n<p$ astfel încât $\det(A(m,n,p))$ este număr prim.

$\det(A(m,n,p))=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ m & n & p\\ np & mp & mn\end{vmatrix}=\underbrace{(n-m)}_{\geq 1}\underbrace{(p-m)}_{\geq 2}\underbrace{(p-n)}_{\geq 1}$

$n-m\geq 1$

$p-n\geq 1$

$p-m>p-n\Rightarrow p-m\geq 2$

Cum $\det(A(m,n,p))$ este număr prim rezultă că $\begin{cases}n-m=1\\ p-n=1\end{cases}$ deci $\begin{cases}m=n-1\\ p=n+1\end{cases}$

Rezultă că m,n,p sunt numere naturale consecutive deci în progresie aritmetică de rație egală cu 1.

2.a) $f=X^4+X^3+\hat{2}X+\hat{2}$

$f(\hat{0})=\hat{0}^4+\hat{0}^3+\hat{2}\cdot\hat{0}+\hat{2}=\hat{2}$

$f(\hat{2})=\hat{2}^4+\hat{2}^3+\hat{2}\cdot\hat{2}+\hat{2}=\hat{1}+\hat{2}+\hat{1}+\hat{2}=\hat{0}$

$f(\hat{0})+f(\hat{2})=\hat{2}+\hat{0}=\hat{2}$

b) In $\mathbb{Z}_3$ avem $-\hat{2}=\hat{1}$.

Conform teoremei lui Bezout avem că polinomul f este divizibil cu $X+\hat{2}$ dacă și numai dacă $f(-\hat{2})=\hat{0}$.

$f(-\hat{2})=\hat{0}\Leftrightarrow f(\hat{1})=\hat{0}\Leftrightarrow a+b=\hat{0}$

$f(\hat{1})=\hat{1}^4+a\cdot\hat{1}^3+\hat{2}\cdot\hat{1}+b=a+b$

Cum $a,b\in\mathbb{Z}_3$ perechile sunt $(\hat{0},\hat{0}),(\hat{1},\hat{2}),(\hat{2},\hat{1})$.

Obs: In calculele de mai sus s-a folosit că $\hat{1}+\hat{2}=\hat{0}$ în $\mathbb{Z}_3$.

c) $\mathbb{Z}_3=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2}\}$

$f(\hat{0})=\hat{0}^4+a\cdot\hat{0}^3+\hat{2}\cdot\hat{0}+b=b$

$f(\hat{1}) = \hat{1}^4 + a\cdot\hat{1}^3 + \hat{2}\cdot\hat{1} + b = a + b$

$f(\hat{2}) = \hat{2}^4 + a\cdot\hat{2}^3 + \hat{2}\cdot\hat{2} + b = \hat{2}a + b + \hat{2}$

Observăm că $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) = b + a + b + \hat{2}a + b + \hat{2} = \hat{2}$

Dacă $f(\hat{0}), f(\hat{1}), f(\hat{2})$ ar fi distincte două câte două, atunci $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) = \hat{0} + \hat{1} + \hat{2} = \hat{0}$ ceea ce este în contradicție cu $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) = \hat{2}$.

Rezultă că pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}_3$ există $x, y \in \mathbb{Z}_3$ cu $x \neq y$ astfel încât $f(x) = f(y)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{xe^x}{e^x + 2}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x) = \dfrac{e^x(e^x + 2x + 2)}{(e^x + 2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
5p	**b)** Arătați că dreapta de ecuație $y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că funcția f are un unic punct de extrem.
	2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{2(x+3)}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}$.
5p	**a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2 + 4x + 5}\,dx = 7$.
5p	**b)** Arătați că $\int_0^1 \left(f^2(x) - 4\right)dx = 4\ln 2$.
5p	**c)** Se consideră numerele reale a și b, cu $0 \le a < b$. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n = \int_a^b f^n(x)\,dx$. Demonstrați că $\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

Subiectul 3

1.a) $f'(x) = \left(\dfrac{xe^x}{e^x + 2}\right)' = \dfrac{(xe^x)'(e^x + 2) - (xe^x)(e^x + 2)'}{(e^x + 2)^2} = \dfrac{(e^x + xe^x)(e^x + 2) - (xe^x)e^x}{(e^x + 2)^2} =$

$= \dfrac{e^x(1+x)(e^x + 2) - xe^{2x}}{(e^x + 2)^2} = \dfrac{e^x\left[(1+x)(e^x + 2) - xe^x\right]}{(e^x + 2)^2} = \dfrac{e^x(e^x + 2 + xe^x + 2x - xe^x)}{(e^x + 2)^2} = \dfrac{e^x(e^x + 2x + 2)}{(e^x + 2)^2}, \forall x \in \mathbb{R}$

b) Căutăm asimptotă oblică de forma $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x + 2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{L.H}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(e^x + 2)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - mx\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{xe^x}{e^x + 2} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{e^x + 2} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{L.H}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{(-2x)'}{(e^x + 2)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{e^x} = \frac{-2}{+\infty} = 0$$

Ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f este $y = x$ (prima bisectoare).

c) Considerăm funcția ajutătoare

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ prin formula $g(x)=e^x+2x+2$

$g'(x)=\left(e^x+2x+2\right)'=e^x+2>0, \forall x\in\mathbb{R}$ deci funcția g este strict crescătoare pe R.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+2x+2\right)=e^{-\infty}+2(-\infty)+2=0-\infty+2=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+2x+2\right)=e^{+\infty}+2(+\infty)+2=+\infty+\infty+2=+\infty$

Funcția g este continuă pe R deci există un singur punct c în care se anulează iar tabelul de semn al funcției g este:

x	$-\infty$		c		$+\infty$
g(x)	- - - - - - - - -		0	+ + + + + + +	

Rezultă următorul tabel de variație pentru funcția f

x	$-\infty$		c		$+\infty$
$f'(x)$	- - - - - - - - -		0	+ + + + + + +	
$f(x)$		$\searrow$	m	$\nearrow$	

Din tabel rezultă că funcția f are un singur punct de extrem (punct de minim).

2.a) $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+4x+5}dx=\int_0^1\frac{2(x+3)}{\sqrt{x^2+4x+5}}\sqrt{x^2+4x+5}dx=\int_0^1(2x+6)dx=\left(x^2+6x\right)\Big|_0^1=1+6-0-0=7$

b) $\int_0^1\left(f^2(x)-4\right)dx=\int_0^1\left(\frac{4\left(x^2+6x+9\right)}{x^2+4x+5}-4\right)dx=\int_0^1\left(\frac{8x+16}{x^2+4x+5}\right)dx=4\int_0^1\left(\frac{2x+4}{x^2+4x+5}\right)dx=$

$=4\int_0^1\frac{\left(x^2+4x+5\right)'}{x^2+4x+5}dx=4\ln\left|x^2+4x+5\right|\Big|_0^1=4\ln 10-4\ln 5=4(\ln 10-\ln 5)=4\ln\frac{10}{5}=4\ln 2$

c) Metoda 1(din barem)

Din calculul de la punctul b) observăm că:

$f^2(x)-4=\frac{8x+16}{x^2+4x+5}>0$ pentru $x\in[0,+\infty)$ și cum $f(x)>0$ pentru $x\in[0,+\infty)$ deducem că $f(x)>2$ pe acest interval.

$\int_a^b f^n(x)dx\geq\int_a^b 2^n dx=2^n\int_a^b 1dx=2^n(b-a)$ și cum $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n(b-a)=+\infty$ rezultă că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_a^b f^n(x)dx=+\infty$

Metoda 2

$$f'(x)=\left(\frac{2x+6}{\sqrt{x^2+4x+5}}\right)'=\frac{(2x+6)'\sqrt{x^2+4x+5}-(2x+6)\left(\sqrt{x^2+4x+5}\right)'}{x^2+4x+5}=$$

$$=\frac{2\sqrt{x^2+4x+5}-(2x+6)\frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+5}}}{x^2+4x+5}=\frac{2\sqrt{x^2+4x+5}-(2x+6)\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}}{x^2+4x+5}=$$

$$=\frac{2\left(x^2+4x+5\right)-(2x+6)(x+2)}{\left(x^2+4x+5\right)\sqrt{x^2+4x+5}}=\frac{2x^2+8x+10-2x^2-10x-12}{\left(x^2+4x+5\right)\sqrt{x^2+4x+5}}=\frac{-2x-2}{\left(x^2+4x+5\right)\sqrt{x^2+4x+5}}$$

$f'(x)=0\Leftrightarrow -2x-2=0\Leftrightarrow x=-1$

Tabelul de variație al funcției f este:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$	+ + + + + + + + +		0	- - - - - - - - - - -	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	2

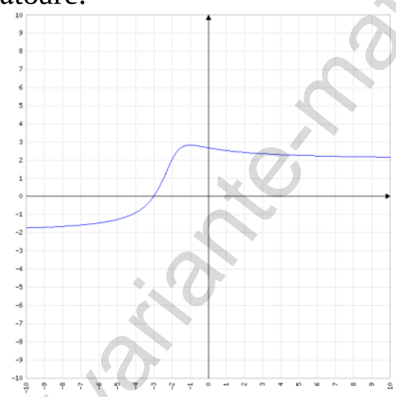
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2(x+3)}{\sqrt{x^2+4x+5}} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}} = 2$$

Din tabel rezultă că $f(x) > 2$ pentru orice $x \in [0,+\infty)$.

Mai departe se rezolva ca la metoda 1

$\int_a^b f^n(x)dx \geq \int_a^b 2^n dx = 2^n \int_a^b 1dx = 2^n(b-a)$ și cum $\lim_{n\to+\infty} 2^n(b-a) = +\infty$ rezultă că $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f^n(x)dx = +\infty$

Obs: Graficul funcției f este în figura următoare:



https://www.mathe-fa.de/ro