Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică

26 August 2020

Gradul didactic II

Metodica predării matematicii
Varianta 1

1. Considerăm polinomul $P = X^4 - 4X^3 + 5X^2 - 2X - 2$.
a) Dacă x_1, x_2, x_3, x_4 sunt rădăcinile complexe ale lui P, calculaţi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$, apoi demonstraţi că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 6$.
b) Un elev afirmă:

"Deoarece suma pătratelor rădăcinilor polinomului P este pozitivă, toate rădăcinile polinomului sunt reale."

Cum procedaţi pentru a-i arăta elevului că nu are dreptate? De unde provine eroarea elevului?
c) Propuneţi întrebări (minim două) pe care ar trebui să le adresaţi elevilor, la clasă, pentru a rezolva problema:

Demonstraţi că polinomul P se descompune ca un produs de două polinoame neconstante, cu coeficienţi întregi.

Includeţi în răspuns o rezolvare a problemei de mai sus.

2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ un număr natural nenul. Definim funcţiile $f_n : D_n \longrightarrow \mathbb{R}$ prin $f_n(x) = \arcsin(1-x^n)$. Am notat cu $D_n \subseteq \mathbb{R}$ domeniul maxim de definiţie al funcţiei f_n.
a) Determinaţi D_3 şi mulţimea punctelor în care funcţia f_3 este derivabilă. Indicaţi eventuale dificultăţi pe care elevii le pot întâmpina pe parcursul rezolvării (minim 2 dificultăţi).
b) Considerăm şirul de numere reale $(I_n)_{n\geq 1}$, unde $I_n = \int_0^1 f_n(x)dx$, $n \in \mathbb{N}^*$. Propuneţi două exerciţii ajutătoare, utile în argumentarea convergenţei şirului. Apoi demonstraţi că şirul este convergent.
c) Calculaţi $\lim_{n\to\infty} I_n$. Prezentaţi cel puţin o greşeală pe care elevii o pot face încercând să calculeze această limită.

3. Fie $A_1A_2\ldots A_n$ un poligon convex cu $n \geq 3$ laturi din planul π. Notăm cu f_n compunerea $f_n = S_{A_n} \circ S_{A_{n-1}} \circ \cdots \circ S_{A_1}$, unde $S_{A_i} : \pi \to \pi$ este simetria planului π faţă de punctul A_i.
a) Se consideră următoarea problemă (pentru cazul $n = 4$):

Arătaţi că $A_1A_2A_3A_4$ este paralelogram dacă şi numai dacă f_4 este identitatea planului ($f_4(P) = P$ pentru orice $P \in \pi$)

Propuneţi indicaţii, în funcţie de nivelul clasei, pentru cel puţin două metode de rezolvare a acestei probleme. Rezolvaţi complet problema folosind una dintre metodele propuse.
b) Demonstraţi că $f_3 = S_{A_3} \circ S_{A_2} \circ S_{A_1}$ este o simetrie centrală (aici $n = 3$). Un elev întreabă dacă există o legătură între această problemă şi cea de la punctul precedent. Ce explicaţii îi puteţi da?
c) Arătaţi că $f_n \circ f_n$ este identitatea planului π dacă n este un număr natural impar. Propuneţi o secvenţă de (minimum trei) exerciţii ajutătoare care să justifice raţionamentul făcut şi care să conducă la rezolvarea problemei. Rămâne adevărată afirmaţia dacă n este un număr par? Justificaţi.

Se vor trata două subiecte la alegere.

Universitatea din Bucureşti
Facultatea de Matematică şi Informatică

26 August 2020

Gradul didactic II

Metodica predării matematicii
Varianta 1 - Barem

1.
Din oficiu: 1p

a) Suma rădăcinilor este 4, iar $x_1x_2 + x_1x_3 + ... = 5$. 1p
De aceea, suma pătratelor este $16 - 2 \cdot 5 = 6$. 2p
b) Câteva posibilităţi de intervenţie.

Cea mai indicată ar fi: daţi un contraexemplu, adică propuneţi 4 numere (de exemplu, 3, 1, -2, i) cu suma pătratelor număr real, pozitiv.

O altă metodă ar putea fi: aplicăm proceduri analitice (de exemplu metoda şirului lui Rolle) pentru a verifica câte soluţii reale are ecuaţia $P(x) = 0$; dezavantajul aici este acela că nu se vede, de fapt, de unde provine eroarea.

O altă metodă didactică: aşteptăm cu comentarea asupra corectitudinii până când rezolvăm şi ultimul punct al problemei (i.e. descompunerea în factori); rezolvăm ecuaţia şi le cerem elevilor să aprecieze dacă răspunsul anterior este greşit, identificând totodată cauza greşelii! 1p

Explicaţia pentru eroarea elevului vine din neînţelegerea implicaţiilor logice: el confundă $p \to q$ cu $q \to p$. Mai precis, are în minte propoziţia *"Dacă mai multe numere sunt reale, atunci suma pătratelor lor este pozitivă"*, pe care o aplică sub forma *"Dacă suma pătratelor mai multor numere (complexe) este pozitivă, atunci toate numerele sunt reale"* 2p
c) Posibile întrebări:

- Ce înseamnă polinom neconstant?
- Ce grade pot avea factorii într-o descompunere?
- Putem avea un factor de gradul I? De ce?
- Dacă renunţăm la condiţia ca factorii să aibă coeficienţi întregi, putem avea şi alte descompuneri?

.... 2p

Pentru rezolvare folosim, de exemplu, metoda coeficienţilor nedeterminaţi, adică identificăm numere întregi a, b, c, d pentru care $P = (X^2+aX+b)(X^2+cX+d)$. (O discuţie de ce factorii nu pot avea gradul 1 este necesară! De asemenea, e de comentat de ce coeficienţii maximali pot fi presupuşi egali cu 1.) Transformăm egalitatea anterioară într-un sistem şi folosim divizibilitatea pentru a-l rezolva în numere întregi.

Deducem $P = (X^2 - 2X - 1)(X^2 - 2X + 2)$. 1p

2.
Din oficiu: 1p

a) Domeniul de definiţie $D_3 = [0, \sqrt[3]{2}]$ 1p
Funcţia f_3 este derivabilă pe $[0, \sqrt[3]{2})$ 1p

Posibile dificultăţi:

- Prezenţa funcţiei arcsin.
- Funcţia arcsin este definită pe $[-1,1]$, dar nu este derivabilă în $x=-1$ şi $x=1$. În general, funcţiile elementare sunt derivabile pe tot domeniul de definiţie.
- Prezenţa unei compuneri de funcţii. Este necesară determinarea domeniului maxim de definiţie/derivabilitate pentru compunere.
- Domeniul de definiţie al funcţiei f_n este diferit de domeniul funcţiei arcsin.

.... 2 x 0,5 = 1p

b) Exerciţiile ajutătoare .... 2 x 0,75 pct = 1,5p

Posibile exerciţii ajutătoare:

- Demonstraţi că pentru orice $x \in [0,1]$ şirul $(f_n(x))_{n\geq 1}$ este crescător.
- Demonstraţi că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este monoton.
- Demonstraţi că şirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.
- Fie $f,g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ două funcţii integrabile Riemann astfel încât $f(x) \leq g(x)$ pentru orice $x \in [a,b]$. Demonstraţi că $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
- Demonstraţi că funcţia $f:[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin(1-x)$ este descrescătoare.

Demonstrarea convergenţei 1,5p

($(I_n)_{n\geq 1}$ crescător 0, 75p, $(I_n)_{n\geq 1}$ mărginit 0, 75p).

c) $\lim I_n = \frac{\pi}{2}$ .... 1,5 pct

Prezentarea unei greşeli .... 1,5 pct

Calculul limitei:

Fie $0 < \epsilon < 1$. Atunci

$I_n = \int_0^{1-\epsilon} f_n(x)dx + \int_{1-\epsilon}^1 f_n(x)dx$, pentru orice $n \geq 1$

$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1-\epsilon} f_n(x)dx = (1-\epsilon)\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}(1-\epsilon)$

(de exemplu, folosind Teorema de medie, pentru orice $n \geq 1$ avem $\int_0^{1-\epsilon} f_n(x)dx = (1-\epsilon)\arcsin(1-(c_n)^n)$, unde $0 \leq c_n \leq 1-\epsilon$ şi $\lim(c_n)^n = 0$.)

$0 \leq \int_{1-\epsilon}^1 f_n(x)dx \leq \frac{\pi}{2}$ şi finalizare

Posibile greşeli:

- Se încearcă schimbarea de variabilă $x = \sqrt[n]{t}$ (sau $1-x^n = t$) şi se ajunge la integrala unei funcţii nedefinite în 0 (sau 1).
- Se încearcă folosirea teoremei de medie sub forma: există $c \in [0,1]$ astfel încât $\int_0^1 f_n(x)dx = \arcsin(1-c^n)$ pentru orice n natural nenul (fără să se ţină cont de faptul că pentru fiecare n există un $c_n \in [0,1]$, nu acelaşi pentru toţi n).
- Se încearcă folosirea teoremei de medie sub forma: Pentru orice n, există $c_n \in (0,1)$ astfel încât $\int_0^1 f_n(x)dx = \arcsin(1-c_n^n)$. Urmează concluzia $\lim_{n\to\infty} c_n^n = 0$ deoarece $c_n \in (0,1)$.

3.

Din oficiu: 1p

a) O rezolvare corectă si completă a problemei 2p

De exemplu $f_4 = t_{2\overrightarrow{A_3A_4}} \circ t_{2\overrightarrow{A_1A_2}} = t_{2\overrightarrow{A_3A_4}+2\overrightarrow{A_1A_2}}$, unde $t_{\overrightarrow{v}}$ este translaţia de vector $\overrightarrow{v}$. Apoi f_4 este identitatea planului dacă şi numai dacă $\overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{0}$, adică patrulaterul $A_1A_2A_3A_4$ este paralelogram.

Diferitele metode cu indicaţii 2p

Posibile metode şi indicaţii:

- Metoda sintetică (se face legătura dintre simetria centrală şi mijlocul unui segment, se reaminteşte teorema medianei, se face legătura cu configuraţia formată de un patrulater convex şi mijloacele laturilor sale, etc);
- Metoda transformărilor geometrice (compunerea a două simetrii centrale este o translaţie: $S_B \circ S_A = t_{2\overrightarrow{AB}}$, compunerea a două translaţii este o translaţie, identitatea planului este o translaţie de vector nul, etc). Aceasta este soluţia de mai sus;
- Metoda analitică (cum se descrie analitic o simetrie centrală, ce condiţii trebuie să îndeplinească coordonatele vârfurilor unui patrulater pentru a fi paralelogram, se poate alege reperul convenabil, etc);
- Metoda numerelor complexe (indicaţii asemănătoare cu cele precedente);

b) Rezolvarea corectă problemei 2p

O posibilă soluţie:

- $f_3 = S_{A_3} \circ t_{2\overrightarrow{A_1A_2}}$;

- Compunerea dintre o translaţie de vector $\overrightarrow{v}$ şi o simetrie centrală faţă de un punct O este o simetrie centrală faţă de un punct O', unde $O' = t_{-\frac{1}{2}\overrightarrow{v}}(O)$.

Legătura dintre cele două probleme 1p

Simetria centrală f_3 este faţă de punctul A_4, unde $A_1A_2A_3A_4$ este paralelogram. Mai exact, deoarece f_4 este identitatea planului (dacă $A_1A_2A_3A_4$ este paralelogram) atunci $f_3 = S_{A_4}$. Aceasta este chiar o soluţie alternativă.

c) Demonstraţia faptului că n impar implică $f_n \circ f_n$ este identitatea planului 1p

f_n este compunerea dintre o simetrie centrală şi o translaţie, deci o simetrie centrală. O simetrie centrală este o involuţie.

Dacă n este par, atunci f_n este o translaţie şi deci afirmaţia este falsă cu excepţia cazului când translaţia este de vector nul, adică identitatea planului 0,5p

Secvenţa de exerciţii ajutătoare poate conţine pe lângă problemele de la punctele a şi b şi alte exemple concrete de poligoane (pentagon sau hexagon) 0,5p

Nota probei de metodica specialităţii este media notelor pe cele două subiecte alese, cu două zecimale fără rotunjire.