

**Examenul național de bacalaureat 2021**

**Proba E. c)**  
**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Testul 4**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Determinați suma primilor șapte termeni ai progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_1 = -5$  și rația  $r = 8$ .
- 5p** 2. Determinați valorile reale nenule ale lui  $a$  pentru care ecuația  $ax^2 - x - a - 1 = 0$  are două soluții distincte în mulțimea numerelor reale.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $3x - \sqrt[3]{x^3 + x^2 - 9} = 2x$ .
- 5p** 4. Calculați  $5A_3^2 - 3C_5^3$ .
- 5p** 5. Se consideră vectorii  $\vec{a} = 2\vec{i} + m\vec{j}$  și  $\vec{b} = 5\vec{i} - (m^2 + 1)\vec{j}$ , unde  $m$  este număr real. Determinați numerele reale  $m$  pentru care vectorii  $\vec{a}$  și  $\vec{b}$  sunt coliniari.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul  $ABC$  cu  $AB > BC$ ,  $AC = 6$ ,  $BC = 10$  și aria egală cu 15. Determinați măsura unghiului  $C$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $M(a, b) = aI_2 + bA$ , unde  $a$  și  $b$  sunt numere reale.
- 5p** a) Arătați că  $\det A = 0$ .
- 5p** b) Demonstrați că  $M(a, b) \cdot M(x, y) = M(ax, ay + bx)$ , pentru orice numere reale  $a, b, x$  și  $y$ .
- 5p** c) Arătați că, dacă  $x$  și  $y$  sunt numere reale pentru care matricele  $B = M(x, 2y) + M(y, 2x)$  și  $C = M(x\sqrt{2}, 1) \cdot M(y\sqrt{2}, 1)$  sunt egale, atunci  $x^2 + y^2 = 0$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție  $x * y = xy + 2x + 2y + 2$  și  $x \circ y = x + y + 2$ .
- 5p** a) Arătați că  $(1 * 2) \circ (1 * 3) = 1 * (2 \circ 3)$ .
- 5p** b) Demonstrați că  $x * e = e$ , pentru orice număr real  $x$ , unde  $e$  este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.
- 5p** c) Determinați numărul natural  $n$  pentru care  $n * (-n) \geq n \circ (-n)$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \begin{cases} x - 1 + \sqrt{x^2 - x + 1}, & x \in (-\infty, 0) \\ x \ln(x + 1) & , \quad x \in [0, +\infty) \end{cases}$ .
- 5p** a) Arătați că funcția  $f$  este continuă pe  $\mathbb{R}$ .
- 5p** b) Demonstrați că funcția  $f$  este convexă pe  $(0, +\infty)$ .
- 5p** c) Arătați că, pentru orice număr real  $a$ ,  $a < 0$ , tangenta la graficul funcției  $f$  în punctul  $A(a, f(a))$  nu este paralelă cu axa  $Ox$ .
2. Se consideră funcțiile  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x}$  și  $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{1 + x\sqrt{x}}{x^2}$ .
- 5p** a) Demonstrați că funcția  $f$  este o primitivă a funcției  $g$ .

**5p** b) Calculați  $\int_{\frac{1}{4}}^4 g(x) dx$ .

**5p** c) Determinați numărul real  $m$ ,  $m \in (0,1)$ , pentru care  $\int_m^1 f^2(x) g(x) dx = \frac{1}{3}$ .

<https://variante-mate.ro>