

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Testul 5

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $(2 - \lg 40) \cdot \frac{1}{\lg^2 5 - \lg^2 2} = 1$.
- 5p** 2. Determinați valorile reale ale lui m pentru care soluția ecuației $2x - m^2 + 1 = 0$ este număr real strict mai mic decât 0.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x^2+x} = 4^{2x}$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $(n+1)! - n! \leq n+2$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-6,6)$ și $B(0,2)$. Determinați coordonatele punctului C , știind că $\overline{AO} = 2\overline{BC}$.
- 5p** 6. Determinați numerele reale a , $a > -2$, știind că $a^2 + 1$ și $a + 2$ sunt lungimile ipotenuzei, respectiv razei cercului circumscris unui triunghi dreptunghic.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{a} \\ 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde $a \in (0, +\infty)$.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(4)) = 1$.
- 5p** b) Demonstrați că $\det(A(a) \cdot A(1) - A(a+1)) > 0$, pentru orice $a \in (0, +\infty)$.
- 5p** c) Arătați că matricea $B(n) = A(1^2) + A(2^2) + A(3^2) + \dots + A(n^2)$ este inversabilă, pentru orice număr natural n , $n \geq 2$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = \sqrt{3}(xy + 4) - 3(x + y)$.
- 5p** a) Arătați că $\sqrt{3} \circ 2 = \sqrt{3}$.
- 5p** b) Demonstrați că $x \circ y = \sqrt{3}(x - \sqrt{3})(y - \sqrt{3}) + \sqrt{3}$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p** c) Calculați $3^1 \circ 3^{\frac{1}{2}} \circ 3^{\frac{1}{3}} \circ \dots \circ 3^{\frac{1}{2021}}$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x - \arctg x, & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{5x}{x^2 + x + 4}, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$.
- 5p** a) Arătați că funcția f este continuă pe \mathbb{R} .
- 5p** b) Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $(-\infty, 0)$.
- 5p** c) Demonstrați că $f(x) \leq 1$, pentru orice număr real x .

2. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x}$.

5p a) Arătați că $\int_1^5 x(x+2)f(x)dx = 16$.

5p b) Calculați $\int_1^3 f(x)dx$.

5p c) Demonstrați că orice primitivă F a funcției f este concavă.

<https://variante-mate.ro>