# EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2008 - SESIUNEA IUNIE-IULIE
## Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D_MT1
### BAREM DE CORECTARE ŞI DE NOTARE

**Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică.**
**Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică.**

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**

**SUBIECTUL I (30 puncte) -Varianta 050**

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | $a_1 + a_2 + ... + a_{2008} = (7+6+9+2+3+0)\cdot 334 + 7+6+9+2$<br>$= 9042.$ | **4p**<br>**1p** |
| **2.** | Intersecţia este dată de sistemul $\begin{cases} y = 2x-1 \\ y = x^2 + x + 1 \end{cases}$<br>din care rezultă ecuaţia $x^2 - x + 2 = 0$, care nu are soluţie, deoarece $\Delta = -7 < 0$. | **1p**<br>**4p** |
| **3.** | $\log_4 x^2 = 2\log_4 x = 2\dfrac{\log_2 x}{\log_2 4} = \log_2 x,$<br>deci ecuaţia devine $\log_2 x = 3$<br>şi are soluţia $x = 8$. | **3p**<br>**1p**<br>**1p** |
| **4.** | Există $C_{13}^3$ posibilităţi de alegere a fetelor şi $C_{12}^2$ posibilităţi de alegere a băieţilor.<br>Astfel, numărul de moduri în care se poate alcătui comitetul este $C_{13}^3 \cdot C_{12}^2$. | **3p**<br>**2p** |
| **5.** | Pantele dreptelor sunt $\dfrac{1-(-1)}{-1-2} = -\dfrac{2}{3}$ şi $\dfrac{4-3}{a-1} = \dfrac{1}{a-1}$,<br>iar condiţia de perpendicularitate este $-\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{a-1} = -1$,<br>deci $a = \dfrac{5}{3}$. | **2p**<br>**2p**<br>**1p** |
| **6.** | Ştim că $\sin\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$,<br>iar din $\dfrac{2\,\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} = -\dfrac{4}{5}$ rezultă $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = -2$ sau $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{1}{2}$,<br>deci $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2} = -2$, deoarece $\dfrac{\alpha}{2} \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right)$. | **2p**<br>**2p**<br>**1p** |

**SUBIECTUL II (30 puncte) -Varianta 088**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$<br>atunci $A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ şi $A + A^t = \begin{pmatrix} 2a & b+c \\ b+c & 2d \end{pmatrix}$,<br>deci $\mathrm{Tr}(A + A^t) = 2a + 2d = 2(a+d) = 2\,\mathrm{Tr}A$. | **1p**<br>**2p**<br>**2p** |
| **b)** | $A\cdot A^t = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$,<br>deci, dacă $0 = \mathrm{Tr}(A\cdot A^t) = a^2+b^2+c^2+d^2$, atunci $a=b=c=d=0$, adică $A = O_2$. | **3p**<br>**2p** |
| **c)** | Din punctul **b)**, suma elementelor matricei $A\cdot A^t$ este $s = (a+c)^2 + (b+d)^2$. | **1p** |

| | | |
|---|---|---|
| | Dacă $s=0$ atunci $a+c=0, b+d=0$, deci $c=-a,\ d=-b$.<br>Rezultă $\det A=\begin{vmatrix} a & b \\ -a & -b \end{vmatrix}=-ab+ab=0$. | 2p<br>2p |
| **2.a)** | $A^2=\begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$,<br>deci $A^2=7\cdot I_2+0\cdot A\in K$ | 3p<br>2p |
| **b)** | Fie $X,Y\in K$, $X=aI_2+bA, Y=cI_2+dA$, unde $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$. Atunci<br>$XY=acI_2+(ad+bc)A+bdA^2=(ac+7bd)I_2+(ad+bc)A\in K$, căci $ac+7bd, ad+bc\in\mathbb{Q}$. | 2p<br>3p |
| **c)** | Folosind notațiile de la b), avem condițiile $ac+7bd=1,\ ad+bc=0$ şi $a\neq 0$ sau $b\neq 0$.<br>Sistemul obținut are determinantul $\begin{vmatrix} a & 7b \\ b & a \end{vmatrix}=a^2-7b^2$<br>care este nenul deoarece, dacă $a\pm b\sqrt{7}=0$ şi $a,b\in\mathbb{Q}$ atunci $a=b=0$. | 2p<br>1p<br>2p |

**SUBIECTUL III (30 puncte) -Varianta 076**

| | | |
|---|---|---|
| **1.a)** | Considerăm $L=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.<br>Avem $L=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+x+1)-(x^2-x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x\left(\sqrt{1+x^{-1}+x^{-2}}+\sqrt{1-x^{-1}+x^{-2}}\right)}=\dfrac{2}{2}=1$. | 2p<br>3p |
| **b)** | Avem $f'(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}-\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$,<br>iar ecuația $f'(x)=0$ nu are soluții, deci derivata funcției are semn constant.<br>Cum $f'(0)>0$, deducem că $f'(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$, ceea ce arată că funcția este strict crescătoare. | 3p<br>1p<br>1p |
| **c)** | $f(1)+...+f(n)=(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+...+(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n+1})=\sqrt{n^2+n+1}-1$,<br>ceea ce se arată prin inducție, sau observând că $f(k)=\sqrt{k^2+k+1}-\sqrt{(k-1)^2+(k-1)+1}$.<br>Apoi, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n+1}-1}{n}=\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{1+n^{-1}+n^{-2}}-n^{-1})=1$, deci<br>$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n^2+n+1}-1}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{\sqrt{n^2+n+1}-n-1}{n}\right)^{\frac{n}{\sqrt{n^2+n+1}-n-1}}\right)^{\sqrt{n^2+n+1}-n-1}=e^{-\frac{1}{2}}$ | 1p<br>1p<br>1p<br>2p |
| **2.a)** | $I_1=\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx=-\dfrac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big\vert_0^1$<br>$=\dfrac{1}{3}$ | 4p<br>1p |
| **b)** | $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^1 x^{n-1}(x\sqrt{1-x^2})dx=-\dfrac{1}{3}x^{n-1}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big\vert_0^1+\dfrac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$<br>$=\dfrac{n-1}{3}\int_0^1 x^{n-2}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}\,dx=\dfrac{n-1}{3}(I_{n-2}-I_n)$,<br>de unde rezultă $3I_n+(n-1)I_n=(n-1)I_{n-2}$, deci concluzia. | 3p<br>1p<br>1p |
| **c)** | Avem $I_n\geq 0$<br>şi $I_n\leq\int_0^1 x^n dx=\dfrac{1}{n+1}$,<br>deci $\lim\limits_{n\to\infty} I_n=0$. | 1p<br>3p<br>1p |

- **Total: 100 de puncte, din care 10 sunt din oficiu.**
- **Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.**