OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală-februarie 2026

Clasa a V a

Barem orientativ de corectare şi notare

 6p 9p 6p	1.	$a = 2026 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 2025) = 2026 + 2 \cdot 2025 \cdot 2026 : 2$ $a = 2026 + 2025 \cdot 2026 = 2026 \cdot (1 + 2025) = 2026 \cdot 2026 = 2026^2$ $b = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2025$ $b = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2025 - (2 + 4 + 6 + \cdots + 2024)$ $b = 2025 \cdot 2026 : 2 - 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 1012)$ $b = 2025 \cdot 1013 - 2 \cdot 1012 \cdot 1013 : 2 = 2025 \cdot 1013 - 1012 \cdot 1013$ $b = 1013 \cdot (2025 - 1012) = 1013^2$ $\left.\begin{array}{l} 4 \cdot b = 2^2 \cdot 1013^2 = (2 \cdot 1013)^2 = 2026^2 \\ \text{Cum } a = 2026^2 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 4 \cdot b$
6p 3p 6p 6p	2.	Fie $\overline{abc}$ numărul căutat. Deoarece $\overline{abc} = 3 \cdot \overline{cba} + 175$, deducem că $c \leq 2$ (dacă $c \geq 3$, atunci $3 \cdot \overline{cba} + 175$ are mai mult de trei cifre). • Dacă $c = 0$ atunci $\overline{cba}$ nu este definit. • Dacă $c = 1$, atunci $\overline{abc} = 3 \cdot \overline{cba} + 175 \Leftrightarrow 97a - 474 = 20b$; $97a - 474$ se termină cu 0 dacă $97a$ se termină cu 4; obţinem $a = 2$ şi cum $97 \cdot 2 < 474$ nu avem soluţii nici în acest caz ; • Dacă $c = 2$, atunci $\overline{abc} = 3 \cdot \overline{cba} + 175 \Leftrightarrow 97a - 773 = 20b$;obţinem $a = 9$ *şi* $b = 5$ şi deci soluţia $\overline{abc} = 952$.
6p 6p 6p 3p	3.	Diferenţa vârstelor a două persoane este constantă: $\overline{a2} - \overline{2a} = 9a - 18$ Deci $2 \cdot \overline{2b} - \overline{2b} = 9a - 18 \Rightarrow \overline{2b} = 9a - 18 \Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \Rightarrow 9a = 38 + b \\ 38 \leq 38 + b \leq 47 \end{array}\right\} \Rightarrow 38 \leq 9a \leq 47 \Rightarrow a = 5$ Deci Ionel are 25 de ani.
6p 6p 6p 3p	4.	a) $\left(2^8\right)^3 = 2^{24}$ $\left(2^6\right)^4 = 2^{24}$ $\left(2^5\right)^5 = 2^{25}$ $2^{24} + 2^{24} = 2^{24}(1+1) = 2^{24} \cdot 2 = 2^{25}$ b) Pornind cu identitatea $2^{n+1} = 2^n + 2^n$, dorim să găsim un n natural astfel încât $n+1 = M5$, $n = M3$, $n = M4$, i.e. $n+1 = M5$ şi $n = M12$ Găsim $n = 24$ Astfel putem scrie $\left(2^8\right)^3 + \left(2^6\right)^4 = \left(2^5\right)^5$. Prin înmulţire cu m^{60}, unde m este un număr natural nenul, rezultă că există o infinitate de triplete $(a,b,c) = (m^{20}2^8, m^{15}2^6, m^{12}2^5)$ care sunt soluţii ale ecuaţiei ale din enunţ.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
7 FEBRUARIE 2026
CLASA a VI-a – SOLUȚII ȘI BAREME

Problema 1 (21 puncte)

Fie $A = \left\{\frac{2035}{10}; \frac{2036}{11}; \frac{2037}{12}; \ldots\right\}$. Determină cardinalul mulțimii $A \cap \mathbb{N}$.

(*Gazeta Matematică*)

Soluție:

Elementele mulțimii A sunt de forma $\frac{2035+x}{10+x}$, unde $x \in \mathbb{N}$ 6p

$\frac{2035+x}{10+x} \in \mathbb{N} \Rightarrow (10+x)|(2035+x)$, ...3p

dar $(10+x)|(10+x) \Rightarrow (10+x)|2025$ 3p

Se poate continua în două moduri:

Soluția 1

$\Rightarrow (10+x) \in \{1, 2025, 3, 675, 5, 405, 9, 225, 15, 135, 25, 81, 27, 75, 45\}$...6p

$\Rightarrow x \in \{5, 15, 17, 35, 65, 71, 125, 215, 395, 665, 2015\} \Rightarrow cardA = 11$.....3p

Soluția 2

$2025 = 3^4 \cdot 5^2 \Rightarrow cardD_{2025} = 5 \cdot 3 = 15$ 3p

Cum $10 + x \geq 10$ și singurii divizori ai lui 2025 mai mici decât 10 sunt 1, 3, 5 și 9, deci 4 divizori..3p

$\Rightarrow cardA = 15 - 4 = 11$..3p

Problema 2 (21 puncte)

Pe o tablă sunt scrise numerele 1, 2, 3, ..., 2025. La fiecare pas avem voie să ștergem oricare două numere și în locul lor să scriem restul împărțirii sumei lor la 9. După 2023 de pași pe tablă rămân 2 numere dintre care unul este 1000. Care este al doilea număr?

Soluție:

Suma numerelor de pe tablă este $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 2025 = 2025 \cdot 1013$ care este divizibil cu 9..6p

După primul pas ștergem numerele x și y și punem în loc restul împărțirii lui $x + y$ la 9. Fie $x + y = 9k + r, 0 \leq r < 9, r \in \mathbb{N}$.

După acest pas suma numerelor rămase pe tablă va fi $S_1 = S - (x + y) + r = S - 9k - r + r = S - 9k$. Dar $S \vdots 9 \Rightarrow (S - 9k) \vdots 9 \Rightarrow S_1 \vdots 9$................6p

Procedând la fel vom obține că după 2023 de pași suma celor două numere rămase pe tablă este divizibilă cu 9...3p

Fie a al doilea număr rămas pe tablă. Cum 1000 nu poate fi restul împărțirii sumei a 2 numere la 9 $\Rightarrow a$ este restul împărțirii sumei a două numere la 9

$\Longrightarrow a < 9$. 3p

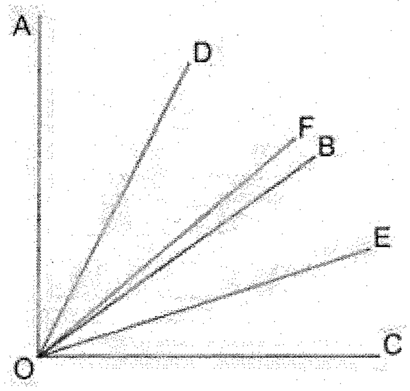
Avem $(1000 + a) \vdots 9$ şi cum $a < 9 \Longrightarrow a = 8$.............................. 3p

Problema 3 (21 puncte)

Se consideră unghiurile adiacente complementare AOB şi BOC ale căror măsuri verifică relaţia $2 \cdot \sphericalangle AOB = 3 \cdot \sphericalangle BOC$.

a) Află măsurile celor două unghiuri.
b) Află măsura unghiului determinat de OB şi bisectoarea unghiului ale cărui laturi sunt bisectoarele unghiurilor date.

Soluţie:



a) $\sphericalangle AOB + \sphericalangle BOC = 90° \Longrightarrow 2\sphericalangle AOB + 2\sphericalangle BOC = 180°$ 3p
Cum avem $2 \cdot \sphericalangle AOB = 3 \cdot \sphericalangle BOC \Longrightarrow 3\sphericalangle BOC + 2\sphericalangle BOC = 180°$ 3p
$\sphericalangle BOC = 36°$şi $\sphericalangle AOB = 54°$. 3p

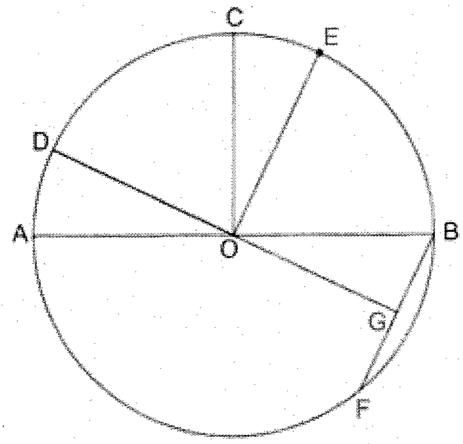
b) Fie OD bisectoarea $\sphericalangle AOB$, OE bisectoarea $\sphericalangle BOC$ şi OF bisectoarea $\sphericalangle DOE$.
$\sphericalangle AOD = \sphericalangle DOB = 54°: 2 = 27°$ 3p
$\sphericalangle BOE = \sphericalangle EOC = 36°: 2 = 18°$ 3p
$\Rightarrow \sphericalangle DOE = \sphericalangle DOB + \sphericalangle BOE = 27° + 18° = 45°$
$\sphericalangle DOF = \sphericalangle FOE = 45°: 2 = 22°30'$ 3p
$\sphericalangle FOB = \sphericalangle FOC - \sphericalangle BOC = (\sphericalangle FOE + \sphericalangle EOC) - \sphericalangle BOC = (22°30' + 18°) - 36° = 4°30'$
. ... 3p

Problema 4 (21 puncte)

Pe cercul $\mathcal{C}(O, r)$ se consideră punctele diametral opuse A şi B. Punctul C se află pe cerc astfel încât măsura arcului mic AC este 25% din măsura cercului. Pe arcele mici ACşi BC se consideră punctele D şi, respectiv, E, astfel încât $\sphericalangle DOE$ este unghi drept.

a) Arată că măsurile arcelor mici AD şi CE sunt egale.
b) Perpendiculara din B pe DO intersectează a doua oară cercul în punctul F. Arată că $\sphericalangle ABF \equiv \sphericalangle DOC$.

Soluție:



a) $\widehat{AC} = \frac{25}{100} \cdot 360° = 90°$......................3p

$\sphericalangle DOE = 90°$ (unghi a centru)$\Rightarrow \widehat{DE} = 90°$

$\widehat{AD} + \widehat{DC} = \widehat{AC} = 90°$ și $\widehat{DC} + \widehat{CE} = \widehat{DE} = 90° \Longrightarrow$

$\widehat{AD} = \widehat{CE}$. 6p

b) Soluția 1

Fie $DO \cap BF = \{G\} \Longrightarrow \sphericalangle BGO = 90°$

În ΔBOG avem $\boldsymbol{\sphericalangle BOG + \sphericalangle OBG = 90°}$ (relația 1)

....3p

Avem $\boldsymbol{\sphericalangle AOD + \sphericalangle DOC} = \sphericalangle AOC = \widehat{AC} = \boldsymbol{90°}$ (relația 2) 3p

$\boldsymbol{\sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle BOG}$ (opuse la vârf) (relația 3) 3p

Din (1), (2) și (3) $\Longrightarrow \sphericalangle DOC \equiv \sphericalangle OBG$, dar $A \in BO, F \in BG \Longrightarrow \sphericalangle DOC \equiv \sphericalangle ABF$.

....3p

Soluția 2

Cum $\widehat{AD} = \widehat{CE} \Longrightarrow \sphericalangle AOD \equiv \sphericalangle COE$ 3p

Dar $\sphericalangle AOD + \sphericalangle DOC = \sphericalangle AOC = 90°$ și $\sphericalangle COE + \sphericalangle EOB = \sphericalangle COB = 90° \Longrightarrow \boldsymbol{\sphericalangle DOC \equiv \sphericalangle EOB}$ (relația 1) 3p

Avem $EO \perp DO$ și $BF \perp DO \Longrightarrow EO \parallel BF$

$EO \parallel BF$ și BO secantă $\Longrightarrow \boldsymbol{\sphericalangle EOB \equiv \sphericalangle OBF}$ (alterne interne) (relația 2)........3p

Din (1) și (2) $\Longrightarrow \sphericalangle DOC \equiv \sphericalangle OBF$, dar $A \in BO \Longrightarrow \sphericalangle DOC \equiv \sphericalangle ABF$. 3p

Str. Al. Marghiloman nr. 30, 120031, Buzău
Tel: +40 (0)238 721655, Fax: +40 (0)238 414655
www.isjbuzau.ro, E-mail: office@isjbuzau.ro

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN BUZĂU

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
7 FEBRUARIE 2026
CLASA a VII-a
Barem de corectare si notare

Subiectul 1

Se consideră numerele $a = \sqrt{2} + \sqrt{4} + \sqrt{6} + \cdots + \sqrt{2026}$ şi $b = \sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{9} + \cdots + \sqrt{3039}$.

a) Calculați raportul dintre b şi a.

b) Arătați că numărul $\frac{b^4+a^4}{a^2b^2}$ este mai mic decât 2,2.

Barem de corectare si notare :

a) $a = \sqrt{2}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{1013})$ si $b = \sqrt{3}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{1013})$.........6p

$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{1013})}{\sqrt{3}(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{1013})} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$...3p

b) $b^4 = (\sqrt{3})^4(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{1013})^4$ *si*

$a^4 = (\sqrt{2})^4(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{1013})^4$ 3p

$b^2 = (\sqrt{3})^2(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{1013})^2 = 3(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{1013})^2$ iar

$a^2 = (\sqrt{2})^2(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{1013})^2 = 2(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{1013})^2$.....3p

Deci $\frac{b^4+a^4}{a^2b^2} = \frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{1013})^4(9+4)}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{1013})^4\cdot 3\cdot 2} = \frac{13}{6} = 2{,}1(6) < 2{,}2$....................................6p

Str. Al. Marghiloman nr. 30, 120031, Buzău
Tel: +40 (0)238 721655, Fax: +40 (0)238 414655
www.isjbz.ro

Subiectul 2

a) Să se demonstreze că $(3^{12})^2 + (3^8)^3 + (3^6)^4 = (3^5)^5$;
b) Arătați că există o infinitate de cvadruple (a, b, c, d) care verifică relația $a^2 + b^3 + c^4 = d^5$.

Barem de corectare si notare :

$(3^{12})^2 = 3^{24}$, $(3^8)^3 = 3^{24}$, $(3^6)^4 = 3^{24}$, $(3^5)^5 = 3^{25}$..................................6p

$3^{24} + 3^{24} + 3^{24} = 3^{24} \cdot 3 = 3^{25}$..6p

Pornind de la identitatea $3^n + 3^n + 3^n = 3^{n+1}$, trebuie sa găsim un numar natural n astfel încât n să fie multiplu de 2, 3 si 4 (n=multiplu de 12) iar n+1 să fie multiplu de 5...............3p

Găsim n=24, astfel putem scrie $(3^{12})^2 + (3^8)^3 + (3^6)^4 = (3^5)^5$.............................3p

Prin înmultirea relației de mai sus cu m^{60}, unde m este un numar natural nenul , rezultă o infinitate de cvadruple : $m^{60} \cdot (3^{12})^2 + m^{60} \cdot (3^8)^3 + m^{60} \cdot (3^6)^4 = m^{60} \cdot (3^5)^5$

$(m^{30} \cdot 3^{12})^2 + (m^{20} \cdot 3^8)^3 + (m^{15} \cdot 3^6)^4 = (m^{12} \cdot 3^5)^5$.....................................3p

Str. Al. Marghiloman nr. 30, 120031, Buzău
Tel: +40 (0)238 721655, Fax: +40 (0)238 414655
www.isjbz.ro

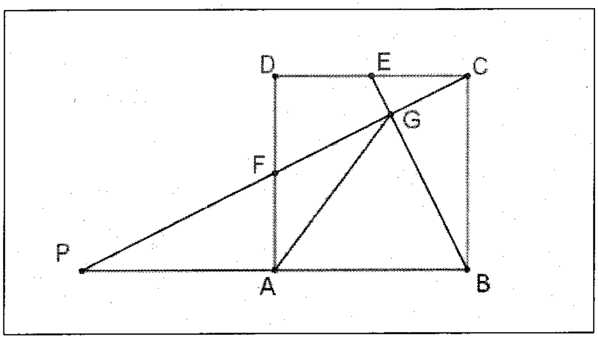
Subiectul 3

În pătratul ABCD notăm E şi F mijloacele laturilor CD, respectiv AD, iar intersecţia lui BE cu CF este punctul G. Demonstraţi că :

a) BE ⊥ CF ;

b) ΔGAB este isoscel.

Barem de corectare si notare :



Comparând triunghiurile ΔBCE şi ΔCDF observăm că sunt dreptunghice şi congruente (catetă-catetă) de unde :

$\sphericalangle CBE = \sphericalangle DCF = x$..3p

$\sphericalangle BEC = \sphericalangle CFD = y$ şi $x + y = 90^{\circ}$..3p

În $\Delta CGE : x + y = 90^{\circ} \Rightarrow \sphericalangle GCE + \sphericalangle GEC = 90^{\circ} \Rightarrow$

$BE \perp CF$..6p

Prelungim CF şi notăm $\{P\} = CF \cap AB$. $\Delta AFP \equiv \Delta DFC$(C.U.) de unde deducem F mijloc PC. FA||BC rezultă FA –linie mijlocie în ΔPBC de unde Aeste mijloc PB.......3p

ΔBGP din teorema medianei avem $AG = AP = AB$ deci ΔAGP este isoscel 6p

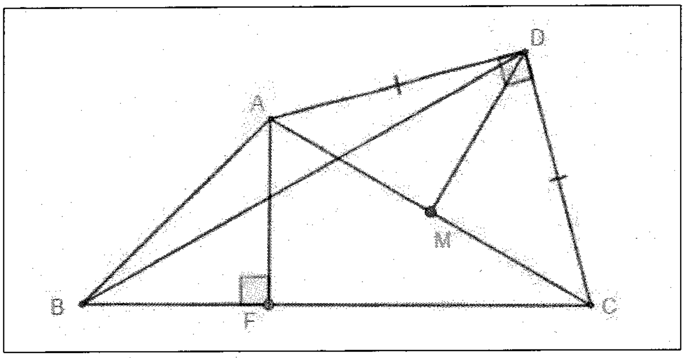
Subiectul 4

În patrulaterul convex ABCD , $\sphericalangle ABC = 45^\circ$, $\sphericalangle BAD = 150^\circ$, iar triunghiul ADC este dreptunghic isoscel cu ipotenuza AC. Calculați măsura unghiului $\sphericalangle BDC$.

(Gazeta Matematică)

Barem de corectare si notare :

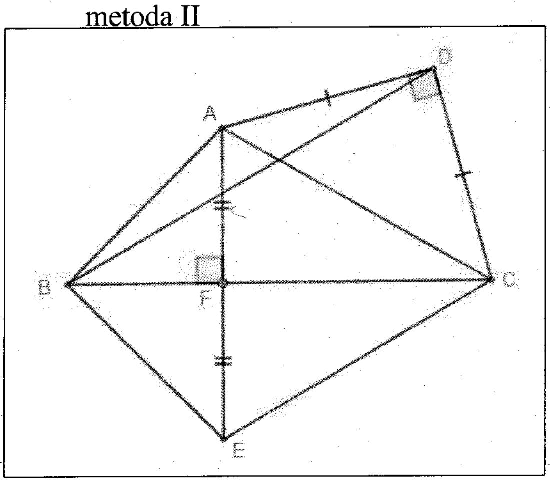
Metoda I



În patrulaterul ABCD din suma unghiurilor aflăm , $\sphericalangle DCB = 75^\circ$. ΔADC –dreptunghic isoscel de unde , $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DCA = 45^\circ$ prin diferență găsim , $\sphericalangle ACB = 30^\circ$............................6p
Construim AF $\perp$BC , in ΔAFC din th. $\sphericalangle 30^\circ$ avem $AF = \frac{AC}{2}$....................................3p
Construim DM$\perp$AC , (DM –înălțime și mediană în triunghi isoscel ADC) de unde $AM = \frac{AC}{2}$.
$\Delta ABF \equiv \Delta DAM$ (dreptunghice isoscele cu $AF = AM = \frac{AC}{2}$) rezulta AB=AD.................6p
ΔABD isoscel cu $\sphericalangle BAD = 150^\circ$ rezulta $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ADB = 15^\circ$ si prin diferență de unghiuri $\sphericalangle DBC = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABD = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$, iar în triunghiul BDC din suma unghiurilor găsim $\sphericalangle BDC = 75^\circ$ 6p

Str. Al. Marghiloman nr. 30, 120031, Buzău
Tel: +40 (0)238 721655, Fax: +40 (0)238 414655
www.isjbz.ro

metoda II



Construim E simetricul lui A fata de BC. $\Delta ABF \equiv \Delta EBF(C.C.)$şi $\sphericalangle(ABF) = 45^\circ \Rightarrow$
ΔABE –dreptunghic isoscel $\Rightarrow \sphericalangle(BAE) = 45^\circ$..6p
ΔADC –dreptunghic isoscel $\Rightarrow \sphericalangle(DAC) = 45^\circ$ şi $\Rightarrow \sphericalangle(EAC) = 150^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 60^\circ$
Cum ΔEAC –isoscel si $\sphericalangle(EAC) = 60^\circ \Rightarrow \Delta EAC$ echilateral............................6p
AC=AE şi $\Delta ABE \equiv \Delta ADC$ (I.U.) $\Rightarrow AB = AD$..3p
ΔABD isoscel cu $\sphericalangle BAD = 150^\circ$ rezulta $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ADB = 15^\circ$ si prin diferenţă de unghiuri $\sphericalangle DBC = \sphericalangle ABC - \sphericalangle ABD = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$, iar în triunghiul BDC din suma unghiurilor găsim $\sphericalangle BDC = 75^\circ$ 6p

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală 7.02. 2026
JUDEŢUL BUZĂU
CLASA a VIII-a – SOLUŢII ŞI BAREME

Problema 1

a) Determinaţi perechile de numere naturale x şi y pentru care suma dintre media aritmetică şi cea geometrică este $\frac{25}{2}$.

b) Fie a, b, c numere reale nenule, cu abc = 1. Arătaţi că $\frac{a+1}{bc}+\frac{b+1}{ac}+\frac{c+1}{ab}+\frac{3}{4}\geq 0$.

21 puncte

Soluţie:

1.a)

$\frac{x+y}{2}+\sqrt{xy}=\frac{25}{2} \Leftrightarrow x+y+2\sqrt{xy}=25 \Leftrightarrow (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=25 \Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y}=5$..........................3p

Cum x, y numere naturale $\Rightarrow (x;y)\in\{(9,4);(4,9);(1,16);(16,1);(25,0);(0,25)\}$..................................6p

1.b)

$\frac{a+1}{bc}+\frac{b+1}{ac}+\frac{c+1}{ab}+\frac{3}{4}\geq 0 \Big| \cdot abc \Leftrightarrow \frac{abc(a+1)}{bc}+\frac{abc(b+1)}{ac}+\frac{abc(c+1)}{ab}+\frac{3abc}{4}\geq 0$.............3p

$\frac{abc(a+1)}{bc}+\frac{abc(b+1)}{ac}+\frac{abc(c+1)}{ab}+\frac{3abc}{4}\geq 0 \Leftrightarrow a(a+1)+b(b+1)+c(c+1)+\frac{3}{4}\geq 0$..............3p

$a(a+1)+b(b+1)+c(c+1)+\frac{3}{4}\geq 0 \Leftrightarrow a^2+a+\frac{1}{4}+b^2+b+\frac{1}{4}+c^2+c+\frac{1}{4}\geq 0$............................3p

$a^2+a+\frac{1}{4}+b^2+b+\frac{1}{4}+c^2+c+\frac{1}{4}\geq 0 \Leftrightarrow \left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(b+\frac{1}{2}\right)^2+\left(c+\frac{1}{2}\right)^2\geq 0$............................3p

Problema 2

Fie ABCD patru puncte necoplanare astfel încât AB = 15 cm, AC = 20 cm, AD = 12 cm, BD = 9 cm şi CD = 16 cm. Fie AE bisectoarea unghiului BAC şi DF bisectoarea unghiului ADB.

a) Arătaţi că EF $\parallel$ (ADC).

b) Demonstraţi că DA $\perp$ BC.

21 puncte

Soluţie:

2.a)

În Δ ABC $\xrightarrow{T.bisect.} \frac{BE}{EC}=\frac{AB}{AC}=\frac{3}{4}$...3p

În Δ ABD $\xrightarrow{T.bisect.} \dfrac{BF}{FA} = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{3}{4}$ 3p

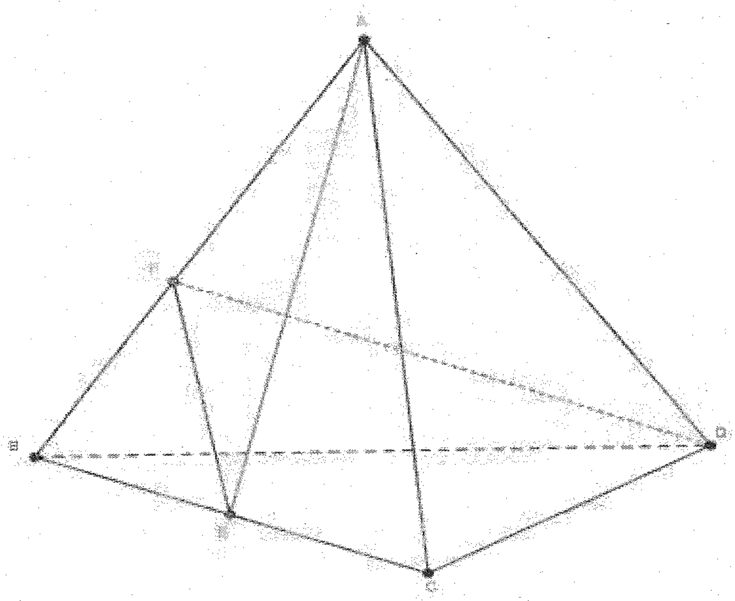
$\dfrac{BE}{EC} = \dfrac{BF}{FA} \xrightarrow{R.T.TH.} EF \parallel AC,\ AC \subset (ACD) \Rightarrow EF \parallel (ACD)$ 3p

2.b)

În Δ ABD: $AD^2 + BD^2 = AB^2 \xrightarrow{R.T.PIT.} \Delta$ ABD dr. în D $\Rightarrow AD \perp BD$ 3p

În Δ ACD: $AD^2 + CD^2 = AC^2 \xrightarrow{R.T.PIT.} \Delta$ ACD dr. în D $\Rightarrow AD \perp CD$ 3p

Din $AD \perp BD$ şi $AD \perp CD \Rightarrow AD \perp (BCD)$, $BC \subset (BCD) \Rightarrow AD \perp BC$ 6p



Problema 3

Numerele reale a şi b verifică relaţia: $a^2 + b^2 + 1 = -\dfrac{a}{2} + b\sqrt{3} + \dfrac{3}{16}$.

a) Demonstraţi că $a = -\dfrac{1}{4}$.

b) Demonstraţi că $[a;b] \cap \mathbb{Z}^*$, unde $[a;b]$ este intervalul închis cu capetele a şi b.

21 puncte

Soluţie:

3.a)

$a^2 + b^2 + 1 = -\dfrac{a}{2} + b\sqrt{3} + \dfrac{3}{16} \Leftrightarrow a^2 + 2a \cdot \dfrac{1}{4} + \left(\dfrac{1}{4}\right)^2 + b^2 - 2b \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$ 6p

$\left(a + \dfrac{1}{4}\right)^2 + \left(b - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{4}$ şi $b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 6p

3.b)

Str. Al. Marghiloman nr. 30, 120031, Buzău
Tel: +40 (0)238 721655, Fax: +40 (0)238 414655
www.isjbz.ro

$[a;b] \cap \mathbb{Z}^* = \varnothing$ $[a;b] = \left[-\frac{1}{4}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$; $-1 < -\frac{1}{4} < 0$ și $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ ....
......................6p

Zero este singurul număr întreg din interval 3p

Problema 4

4. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub și M, N, P, Q mijloacele muchiilor BC, AD, CC', respectiv DD'. Notăm $AM \cap BD = \{E\}$, $CN \cap BD = \{F\}$, $DP \cap CD' = \{E'\}$, $C'Q \cap CD' = \{F'\}$.

a) Demonstrați că $EE' = FF'$ și $EE' \parallel (AC'Q)$.

b) Determinați sinusul unghiului format de dreptele EE' și FF'.

c) Demonstrați că $EE' \parallel (GFF')$, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABD.

Supliment G.M. 11 – 2025

21 puncte

Soluție:

4a)

Notam AB = 2x; ABCD pătrat, $AC \cap BD = \{O\}$, E centrul de greutate al Δ ABC, BE = 2 OE, AG = 2ME; F centrul de greutate al Δ ADC, DF = 2 OF, CF = 2NF $\Rightarrow$ DF = FE = EB; DCC'D' pătrat, D'C $\cap$ C'D = $\{O'\}$, E' centrul de greutate al Δ DC'C, CE' = 2 O'E', DE' = 2PE'; F' centrul de greutate al Δ D'DC', D'F' = 2 O'F', C'F' = 2QF' $\Rightarrow$ D'F' = F'E' = E'C..3p

ΔDPB: $\frac{DE'}{E'P} = \frac{DE}{EB} = 2 \xrightarrow{R.T.TH.} EE' \parallel PB \Rightarrow \Delta DEE' \sim \Delta DBP \Rightarrow EE' = \frac{2}{3}BP$ analog $\Delta D'CN$: $\frac{CF'}{F'D'} = \frac{CF}{FN} = 2 \xrightarrow{R.T.TH.} FF' \parallel D'N \Rightarrow \Delta CFF' \sim \Delta CND' \Rightarrow FF' = \frac{2}{3}D'N$; $PB = D'N \Rightarrow EE' = FF'$ .....
....3p

$PB \parallel AQ$, $AQ \subset (AC'Q)$, $EE' \parallel PB \Rightarrow EE' \parallel (AC'Q)$ 3p

4b)

$$\left.\begin{cases} EE' \parallel AQ \\ FF' \parallel D'N \\ AQ \cap D'N = \{K\} \end{cases}\right. \Rightarrow \angle(EE';FF') = \angle D'KQ$$ 3p

$\Delta ADD'$, D'N si AQ mediane, D'N = AQ = $x\sqrt{5}$, K centru de greutate $\Delta ADD'$,

$A_{\Delta D'KQ} = \frac{1}{6} A_{\Delta ADD'} = \frac{x^2}{3}$

$\frac{x^2}{3} = \frac{\frac{2x\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{x\sqrt{5}}{3} \cdot \sin K}{2} \Rightarrow \sin K = \frac{3}{5}$..3p

4c)

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{CF'}{FD'}=\dfrac{CG}{GA}=2\xrightarrow{R.T.TH.}F'G\parallel D'A,\ D'A\subset(ADD')\Rightarrow F'G\parallel(ADD') \\ \dfrac{OF}{FD}=\dfrac{OG}{GA}=\dfrac{1}{2}\xrightarrow{R.T.TH.}FG\parallel AD,\ AD\subset(ADD')\Rightarrow FG\parallel(ADD') \end{array}\right. \Rightarrow (GFF')\parallel(ADD')$$ 3p

$PB\parallel AQ; AQ\subset(ADD')\Rightarrow PB\parallel(ADD')$ dar $EE'\parallel PB\Rightarrow EE'\parallel(ADD')\parallel(GFF')$..........................3p