OLIMPIADA SATELOR

ETAPA LOCALĂ

CLASA A V-A

BAREM ORIENTATIV DE EVALUARE SI NOTARE

1.

$x = 2^{5^3} - 16^{31} = 2^{125} - 2^{124} = 2^{124}$	2p
$y = 3^{625} : (3^{500} \cdot 3^{32}) = 3^{93}$	2p
$x = (2^4)^{31} = 16^{31}; y = (3^3)^{31} = 27^{31} \Rightarrow x < y$	1 p
$x = 2^{124} = (2^{62})^2$ – pătrat perfect	1 p
$y = 3^{93} = (3^{31})^3$ – cub perfect	1 p

2 .

Numerele sunt: $n, n+2, n+4, \dots, n+14$	2 p
$n+4+n+14 = 74$	3 p
$n = 28$	
$n+8 = 28+8 = 36$ (al cincilea termen)	2 p

3.

a) $\{7 + 6 \cdot [5 + 4 \cdot (3 + n : 2)]\} = 253$	1p
$5 + 4 \cdot (3 + n : 2) = 41$	1p
$n = 12$	2 p
b) $S = 1 + 3 + 5 + \cdots 25$	1p
$S = 169$	2p

4.

Al 64-lea pătrat conține 2^{63} boabe	2 p
$2^{10} = 1024$	1 p
$2^{20} \approx 1000000 = 10^6$	2 p
$2^{60} = (2^{20})^3 \approx 10^{18}$ -19 cifre	1 p
$2^{63} = 2^{60} \cdot 8 \approx 10^{18} \cdot 8$-19 cifre	1 p

OLIMPIADA SATELOR

ETAPA LOCALĂ

CLASA A VI-A

BAREM ORIENTATIV DE EVALUARE SI NOTARE

1.

Fie x numărul căutat şi r – restul, $r \leq 12$	1p
$x = 12k_1 + r$ $x = 21k_2 + r$	2p
deci $(x - r) \vdots [12, 21] = 84$	2 p
x este cel mai mare număr de trei cifre, dacă $x = 84 \cdot 11 + 11 = 935$	2 p

2.

a) Se observă că primul număr de pe fiecare linie este un număr de forma $2k, unde\ k \in \mathbb{N}^*$	2 p
Primul număr de pe linia 123 este $2 \cdot 123 = 246$	2 p
b) Numerele diferite din tablou sunt toate numerele pare mai mici sau egale cu 2008	1 p
S=2+4+6+...+2008=$2(1 + 2 + 3 + \cdots + 1004) = 2 \cdot \frac{1004 \cdot 1005}{2} = 1004 \cdot 1005$	2 p

3.

$AC = CB = CD = x$ $CD = 2x, AD = 3x, BC = x$	2p
$\Leftrightarrow 2x = \dfrac{3x + x}{2} \Rightarrow P_1$ – adevărată	1p
$AB = 2x, BC = x, AD = 3x, AC = x$	2p
$\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{BC} + \dfrac{1}{AD} = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3x} = \dfrac{11}{6x} < \dfrac{2}{AC} = \dfrac{2}{x} \Rightarrow P_2$ – falsă	2p

4.

$a = \frac{11k}{45}, b = \frac{11k}{30}, c = \frac{22k}{45}, d = \frac{55k}{90}, e = \frac{66k}{90}, k \in \mathbb{N}, k \neq 0$ 2 p

$a + b + c + d = 360^0 \Rightarrow$ 4 p

$k = \frac{360 \cdot 9}{22}$

$a = 36^0, b = 54^0, c = 72^0, d = 90^0, e = 108^0$ 1 p

Str. Al. Marghiloman nr. 30, 120031, Buzău
Tel: +40 (0)238 721655, Fax: +40 (0)238 414655
www.isjbz.ro

OLIMPIADA SATELOR - ETAPA LOCALĂ

BAREM ORIENTATIV DE EVALUARE ŞI NOTARE

CLASA A VII-A

1.

a) Aflaţi perimetrul unui dreptunghi care are dimensiunile egale cu m_aşi m_g ale numerelor:

$$a = \left[5,(6) - 3\frac{3}{4} + 0,75\right] \cdot 1\frac{1}{2} \quad \text{și} \quad b = \left(\frac{1}{12}\right)^{-1} + \sqrt{116,64:2,7}.$$

Solutie:

Calcularea numărului a=4..1p

Calcularea numărului b=16..1p

Media aritmetică $Ma = 10$ si media geometrică $Mg = 8$ si perimetrul $P = 36$....................1p

b) . Determinaţi numerele întregi a, b, ştiind că $\frac{2a+1}{3} = \frac{4}{b-2}$

Soluţie:

$(2a + 1)(b - 2) = 12$; divizorii intregi ai lui 12 sunt :

$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12\}$..1p

$2a + 1$ este numar intreg impar => $2a + 1 \in \{-3, -1, 1, 3\}$ 1p

Din $2a + 1 = -3$ și $b - 2 = -4 => a = -2$ și $b = -2$;

$2a + 1 = -1$ și $b - 2 = -12 => a = -1$ și $b = -10$;

$2a + 1 = 1$ și $b - 2 = 12 => a = 0$ și $b = 14$;

$2a + 1 = 3$ și $b - 2 = 4 => a = 1$ si $b = 6$.. 2p

2. Se consideră numărul real $a = 2027 - \frac{1+2+3+\cdots+2025}{\sqrt{1+3+5+\cdots+2025}}$.

a) Arătaţi că a este egal cu 2.

b) Calculaţi $S = a^0 + a^1 + a^2 + \cdots + a^{2027}$.

c) Arătaţi că $S = a^0 + a^1 + a^2 + \cdots + a^{2027}$ este divizibil cu 5.

Solutie.

a) $\sqrt{1 + 3 + 5 + \cdots + 2025} = 1003$ 1p

Calcularea numărului $a = 2$..1p

b) $S = 2^{n+1} - 1$ 1p

$S = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{2027} = .2^{2008} - 1$ 1p

c) $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 = 15$ divizibil cu 5..1p

Sunt 2028 termeni, 2028 divizibil cu 4,rezultă

$S = (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3) + (2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7) \dots + (2^{2024} + 2^{2025} + 2^{2026} + 2^{2027})$

$=15 + 2^4 \cdot 15 + \dots\dots + 2^{2024} \cdot 15 = 15(1 + 2^4 + \dots\dots + 2^{2024})$

$S = 3 \cdot 5(1 + 2^4 + \dots\dots + 2^{2024})$ divizibil cu 5 ....2p

3. În trapezul $ABCD$ se ştie că $AD \parallel BC, AC \perp BD, AC = 6,5$cm şi $BD = 4,8$cm.

a) Calculaţi aria trapezului $ABCD$.

b) Paralela prin punctul A la dreapta DB intersectează dreapta BC în punctul E. Determinaţi aria triunghiului AEC.

Solutie.

a) Reprezentarea figurii 1p

Formula ariei patrulaterului ortodiagonal..1p

Calcularea ariei trapezului $A = 15{,}6\ cm^2$..1p

b) $AE \parallel BD, BD \perp AC \Rightarrow AE \perp AC$ 1p

$AD \parallel BC, E \in BC \Rightarrow AD \parallel EB. AE \parallel BD \Rightarrow AEBD$ paralelogram 1p

ΔAEC este dreptunghic, $\sphericalangle EAC = 90^0$, AE=BD=4,8cm 1p

Calculul ariei ΔAEC =15,6 cm^2..1p

4 . Se consideră pătratul $ABCD$ şi în exteriorul lui, triunghiul echilateral ABE. Fie triunghiul echilateral DEF, astfel încât punctul B să fie în interiorul său. Aflaţi măsura unghiului $\sphericalangle BFE$.

Solutie.

Realizarea desenului 1p

$\sphericalangle EAD = \sphericalangle EAB + \sphericalangle$ DAB=$60^0 + 90^0$ =150^0 .... 1p

$AD = AE \Rightarrow \Delta\ AED\ isoscel;\ \sphericalangle AED = \sphericalangle ADE = (180^0 - 150^0):2 = 15^0$ 1p

$\sphericalangle DEB = \sphericalangle AEB - \sphericalangle AED = 60° - 15° = 45°$ 1p

$\sphericalangle BEF = \sphericalangle DEF - \sphericalangle DEB = 60° - 45° = 15°$ 1p

$AE = BE;\ \sphericalangle AED = \sphericalangle BEF;\ ED = EF \Rightarrow \Delta AED = \Delta BEF\ (L.U.L)$ 1p

Rezultă $\sphericalangle BEF = \sphericalangle AED = 15°$ 1p

OLIMPIADA SATELOR

CLASA A VIII-A

ETAPA LOCALĂ

Barem orientativ de corectare și notare

1. a) Fie x, y, z numere raționale pozitive astfel încât $x + y + z = 2$. Arată că numărul $n = \sqrt{(xy + 2z)(yz + 2x)(zx + 2y)}$ este număr rațional.

b) Fie expresia $E(x) = (x^2 + 3x)(x^2 + 3x - 2) - 8$. Determină numerele întregi a, b, c, d cu $a < b < c < d$ pentru care avem $E(x) = (x + a)(x + b)(x + c)(x + d)$.

a) $xy + 2z = xy + (x + y + z)z$

$= xy + xz + yz + z^2$

$= x(y + z) + z(y + z)$

$= (x + z)(y + z)$

La fel $yz + 2x = (x + y)(z + x)$ și $zx + 2y = (x + y)(y + z)$ **(3p)**

$n = \sqrt{(x + z)(y + z)(x + y)(z + x)(x + y)(y + z)}$

$= |(x + z)(y + z)(x + y)|$

$= (x + z)(y + z)(x + y) \in \mathbb{Q}$ **(1p)**

b) $x^2 + 3x = a$

$E = a(a - 2) - 8$

$= a^2 - 2a - 8$

$= (a - 4)(a + 2)$ **(1p)**

$= (x^2 + 3x - 4)(x^2 + 3x + 2)$

$= (x - 1)(x + 4)(x + 1)(x + 2)$ **(1p)**

Deci $a = -1, b = 1, c = 2, d = 4$. **(1p)**

2. **Fie a și b numere reale astfel încât $a^2 + b^2 - 3a - 5b + \frac{33}{4} = 0$.**

   Arată că $|a + b - 4| \leq 1$.

$a^2 + b^2 - 3a - 5b + \dfrac{33}{4} = 0 |\cdot 4 \Rightarrow 4a^2 + 4b^2 - 12a - 20b + 33 = 0 \Rightarrow$

$(2a-3)^2 + (2b-5)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (2a-3)^2 + (2b-5)^2 = 1$ **(3p)**

De aici se obține că:

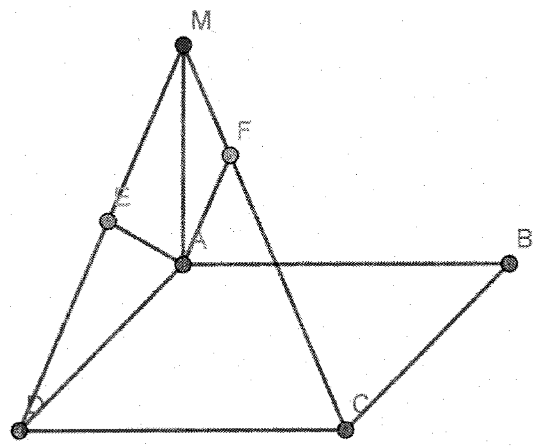
$(2a-3)^2 \leq 1 \Leftrightarrow |2a-3| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2a - 3 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq a \leq 2$ **(1p)**

$(2b-5)^2 \leq 1 \Leftrightarrow |2b-5| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2b - 5 \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq b \leq 3$ **(1p)**

Din $1 \leq a \leq 2$ și $2 \leq b \leq 3$ obținem $3 \leq a + b \leq 5$ de unde $-1 \leq a + b - 4 \leq 1$ adică $|a + b - 4| \leq 1$. **(2p)**

3. **Pe planul dreptunghiului $ABCD$ se ridică o perpendiculară în punctul A pe care ia un punct M . Fie $AE \perp MD, E \in MD$ și $AF \perp MC, F \in MC$. Demonstrați că $EF \perp MC$.**

Se arată că $MC \perp (AEF)$
Din $MA \perp (ABC)$ și $CD \subset (ABC)$ rezultă că $MA \perp CD$. **(1p)**
Din $CD \perp AD, CD \perp AM$ și $AM, AD \subset (AMD)$ rezultă $CD \perp (ADM)$ și cum $AE \subset (AMD)$ obținem că $CD \perp AE$. **(2p)**
Din $AE \perp CD$, $AE \perp MD$ și $CD, MD \subset (MCD)$ rezultă că $AE \perp (MCD)$ și cum $MC \subset (MCD)$ obținem că $AE \perp MC$. **(2p)**
Din $AE \perp MC$, $AF \perp MC$ și $AE, AF \subset (AEF)$ rezultă $MC \perp (AEF)$ și cum $EF \subset (AEF)$ obținem $EF \perp MC$. **(2p)**



4. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Punctul M este mijlocul muchiei AB iar N este centrul feței $BCC'B'$.

a) Demonstrați că $AC' \parallel (B'MC)$.

b) Demonstrați că $D'N \perp (B'MC)$.

a) MN este linie mijlocie în triunghiul $ABC' \Rightarrow MN \parallel AC'$ și cum $MN \subset (B'MC)$ rezultă că $AC' \parallel (B'MC)$ (2p)

b) Triunghiul $D'B'C$ este echilateral iar $D'N$ este mediană , deci și înălțime$\Rightarrow$ $D'N \perp B'C$
Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul NCD' cu $\sphericalangle C' = 90°$ obținem $D'N^2 = \frac{6a^2}{4}$
Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul BMN cu $\sphericalangle B = 90°$ obținem $MN^2 = \frac{3a^2}{4}$
Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul AMD' cu $\sphericalangle A = 90°$ obținem $DM'^2 = \frac{9a^2}{4}$
(2p)
Avem $D'N^2 + MN^2 = DM'^2$de unde rezultă că $\sphericalangle D'NM = 90°$ adică $D'N \perp MN$ (1p)
Din $D'N \perp B'C, D'N \perp MN$ și $B'C, MN \subset (B'MC)$ rezultă $D'N \perp (B'MC)$. (1p)