

**Examenul de bacalaureat național 2017**

**Proba E. c)**

**Matematică M\_mate-info**

**Clasa a XII-a**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Simulare**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică*

*Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	$\frac{2+i}{2-i} + \frac{2-i}{2+i} = \frac{(2+i)^2 + (2-i)^2}{(2-i)(2+i)} =$ $= \frac{6}{5}$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>2.</b>	$x_1 + x_2 = 2m + 3$ , $x_1 x_2 = m^2 + 3m + 2$ $(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 4m^2 + 12m + 9 - 4m^2 - 12m - 8 = 1$ , pentru orice număr real $m$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>3.</b>	$\sqrt{x-3} = 5-x \Rightarrow x-3 = (5-x)^2$ , deci $x^2 - 11x + 28 = 0$ $x = 7$ , care nu verifică ecuația, sau $x = 4$ , care verifică ecuația	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>4.</b>	Cifra sutelor se poate alege în 4 moduri, cifra zecilor se poate alege în câte 4 moduri Cifra unităților se poate alege, pentru fiecare mod de alegere a primelor două cifre, în câte 3 moduri, deci se pot forma $4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ de numere	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>5.</b>	$MP \parallel BC$ , $NP \parallel AB$ $BNPM$ paralelogram, deci $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BP}$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>6.</b>	$2\sin x \cos x = \cos x \Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$ sau $\sin x = \frac{1}{2}$ Cum $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ , obținem $x = \frac{\pi}{2}$ sau $x = \frac{5\pi}{6}$	<b>3p</b> <b>2p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix} = a^2 + 3 + 3 - a - 9 - a =$ $= a^2 - 2a - 3 = (a+1)(a-3)$ , pentru orice număr real $a$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$A(m)A(2-m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 3 \\ 1 & 3 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 3 \\ 1 & 3 & 2-m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6-m & 6-m \\ m+4 & -m^2+2m+10 & 7 \\ m+4 & 7 & -m^2+2m+10 \end{pmatrix}$ $A(2-m)A(m) = \begin{pmatrix} 3 & m+4 & m+4 \\ 6-m & -m^2+2m+10 & 7 \\ 6-m & 7 & -m^2+2m+10 \end{pmatrix}$ , de unde obținem $m=1$	<b>2p</b> <b>3p</b>

c)	Sistemul are soluție unică, deci $a \neq -1$ și $a \neq 3$ ; pentru fiecare număr întreg $a$ , $a \neq -1$ și $a \neq 3$ , soluția sistemului este de forma $\left( \frac{a-1}{a+1}, \frac{1}{a+1}, \frac{1}{a+1} \right)$ Cum $a \in \mathbb{Z}$ , obținem $\frac{a-1}{a+1}, \frac{1}{a+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a+1$ este divizor al lui 1, deci $a = -2$ sau $a = 0$	3p 2p
2.a)	$x * y = -5xy + 10x + 10y - 20 + 2 =$ $= -5x(y-2) + 10(y-2) + 2 = 2 - 5(x-2)(y-2)$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	2p 3p
b)	$n * n = 2 - 5(n-2)^2$ , $(n * n) * n = 2 + 25(n-2)^3$ $2 + 25(n-2)^3 = n \Leftrightarrow (n-2)\left(25(n-2)^2 - 1\right) = 0$ și, cum $n$ este număr natural, obținem $n = 2$	3p 2p
c)	$a * a = b \Leftrightarrow b - 2 = -5(a-2)^2$ $b * b = a \Leftrightarrow a - 2 = -5(b-2)^2$ , deci $a - 2 = -125(b-2)^4$ $a - 2 = 0$ , de unde $a = b = 2$ sau $a - 2 = -\frac{1}{5}$ , de unde $a = b = \frac{9}{5}$	1p 2p 2p

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{x+2}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$ , $x \in \mathbb{R}$ $x \in (-\infty, -2] \Rightarrow f'(x) \leq 0$ , deci $f$ este descrescătoare pe $(-\infty, -2]$ $x \in [-2, +\infty) \Rightarrow f'(x) \geq 0$ , deci $f$ este crescătoare pe $[-2, +\infty)$	3p 1p 1p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{x^2+2x+2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \left( 1 + \frac{-2x-2}{x^2+2x+2} \right)^{\frac{x^2+2x+2}{-2x-2}} \right)^{\frac{-2x-2}{x^2+2x+2} \cdot x} =$ $= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2-2x}{x^2+2x+2}} = e^{\frac{1}{2}}$	1p 2p 2p
c)	$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $g(x) = f(x) - a$ este continuă și derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $g'(x) = f'(x)$ , pentru orice $x \in \mathbb{R}$ , deci $g$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, -2)$ și strict crescătoare pe $(-2, +\infty)$ Cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1 - a > 0$ , $g(-2) = -\sqrt{2} - a < 0$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 - a > 0$ , pentru orice $a \in (-\sqrt{2}, -1)$ , ecuația $f(x) = a$ are exact două soluții reale distințe	2p 3p
2.a)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = 2\sqrt{x+1} \Big _0^1 = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1)$	3p 2p
b)	$x \in [0, 1] \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq 1$ și $x^n \geq 0$ , deci $\frac{x^n}{\sqrt{x+1}} \leq x^n$ , pentru orice număr natural nenul $n$ $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x+1}} dx \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big _0^1 = \frac{1}{n+1}$ , pentru orice număr natural nenul $n$	2p 3p

<b>c)</b>	$I_n = 2 \int_0^1 x^n (\sqrt{x+1})' dx = 2x^n (\sqrt{x+1}) \Big _0^1 - 2n \int_0^1 x^{n-1} \sqrt{x+1} dx = 2\sqrt{2} - 2n \int_0^1 x^{n-1} \frac{x+1}{\sqrt{x+1}} dx =$ $= 2\sqrt{2} - 2n \int_0^1 \frac{x^n + x^{n-1}}{\sqrt{x+1}} dx = 2\sqrt{2} - 2nI_n - 2nI_{n-1} \Rightarrow (2n+1)I_n = 2\sqrt{2} - 2nI_{n-1}, \text{ pentru orice}$ <p style="text-align: center;">număr natural <math>n, n \geq 2</math></p>	<b>3p</b> <b>2p</b>
-----------	---	------------------------