EXAMENUL NAȚIONAL DE BACALAUREAT – 2025
Proba E.c)
Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE
Decembrie 2024

SIMULARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z-iz=7-i-i(7-i)=7-i-7i+i^2=6-8i$ $\lvert 6-8i\rvert=\sqrt{6^2+(-8)^2}=10$	3p 2p
2.	$f(a+1)=3-2a,\ f(3a)=5-6a$ $3-2a=5-6a+18$, deci $4a=20$, avem $a=5$	2p 3p
3.	$\log_2(2x-3)=2\log_2(3-x)$, deci $2x-3=(3-x)^2$ de unde obținem $x^2-8x+12=0$ $x\in\{2,6\}$, convine numai $x=2$	3p 2p
4.	Sunt 90 de numere naturale de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile $\overline{ab}$, $b\in\{1,3,5,7,9\}$ ia 5 valori, $a\in\{1,2,...,9\}-\{b\}$ ia 8 valori, sunt $5\cdot 8=40$ cazuri favorabile, $P=\frac{4}{9}$	2p 3p
5.	Mijlocul M al segmentului $[AB]$ are coordonatele $x_M=\frac{x_A+x_B}{2}=4, y_M=\frac{y_A+y_B}{2}=2$ Panta dreptei AB este $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{1}{2}$. Panta mediatoarei d este $m_d=-2$. Ecuația mediatoarei este $y-y_M=m_d\cdot(x-x_M)$, respectiv $y=-2x+10$	2p 3p
6.	$\sin^2 x+\cos^2 x=1\Rightarrow \cos^2 x=\frac{25}{169}$ $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\Rightarrow \cos x=-\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}=-\frac{12}{5}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(4)=\begin{pmatrix}5&1\\16&3\end{pmatrix}, A(4)-I_2=\begin{pmatrix}4&1\\16&2\end{pmatrix}$ $\det\left(A(4)-I_2\right)=\begin{vmatrix}4&1\\16&2\end{vmatrix}=4\cdot 2-16\cdot 1=-8$	2p 3p
b)	$A(x)\cdot A(2)=\begin{pmatrix}x+1&1\\x^2&x-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&1\\4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x+7&x+2\\3x^2+4x-4&x^2+x-1\end{pmatrix}=(x+2)\cdot A(x)=\begin{pmatrix}x^2+3x+2&x+2\\x^3+2x^2&x^2+x-2\end{pmatrix}$ Din $A(x)\cdot A(2)-(x+2)\cdot A(x)=I_2$ deducem $\begin{pmatrix}5-x^2&0\\-x^3+x^2+4x-4&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, de unde obținem $\begin{cases}5-x^2=1\\-x^3+x^2+4x-4=0\end{cases}$. Din prima ecuație se obține $x\in\{-2,2\}$, care verifică și a doua ecuație.	2p 3p

c)	$A(1)+A(2)+A(3)+\ldots+A(9)=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1^2 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2^2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 1\\ 3^2 & 2\end{pmatrix}+\ldots+\begin{pmatrix}10 & 1\\ 9^2 & 8\end{pmatrix}=$	2p
	$\begin{pmatrix}2+3+4+\ldots+10 & 9\\ 1^2+2^2+3^2+\ldots+9^2 & 0+1+2+\ldots+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}54 & 9\\ 285 & 36\end{pmatrix}$	3p
2.a)	$x*y=2xy-10x-10y+55=2x(y-5)-10y+50+5=2x(y-5)-10(y-5)+5=$	3p
	$=(2x-10)(y-5)+5=2(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y	2p
b)	$x*e=e*x=x,\forall x\in\mathbb{R}$	2p
	$2(x-5)(e-5)-(x-5)=0\Leftrightarrow(x-5)(2e-11)=0$, pentru orice număr real x, rezultă $e=\frac{11}{2}$	3p
	Legea este comutativă, rezultă $x*\frac{11}{2}=\frac{11}{2}*x=x$, pentru orice număr real x, deci $e=\frac{11}{2}$ este elementul neutru al legii „ * ”	
c)	Din $m*n=11$ avem $(m-5)(n-5)=3$	2p
	$(m-5,n-5)\in\{(1,3),(3,1),(-1,-3),(-3,-1)\}\Leftrightarrow(m,n)\in\{(6,8),(8,6),(4,2),(2,4)\}$	3p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\dfrac{(x+1)'\cdot\sqrt{x^2+x+1}-\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)'\cdot(x+1)}{x^2+x+1}=$	2p
	$\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}(x+1)}{x^2+x+1}=\dfrac{1-x}{2\left(x^2+x+1\right)\sqrt{x^2+x+1}}$	3p
b)	$x=1$ este punct de maxim, $f(1)=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ este valoarea maximă	2p
	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1,\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$, f este funcție continuă, rezultă $\operatorname{Im}f=\left(-1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$	3p
c)	Dacă $x\in[1,+\infty)$, atunci $f(x)\in\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$	2p
	$x\in[1,+\infty)$, rezultă $2-x\in(-\infty,1]$ iar $f(2-x)\in\left(-1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$. Rezultă $0<f(x)+f(2-x)\le\frac{4\sqrt{3}}{3}$ pentru orice $x\in[1,+\infty)$	3p
2.a)	$\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}dx=\int_0^1(2-x)dx=$	3p
	$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$	2p
b)	$\int f(x)dx=\int(2-x)(e^x)'dx=(2-x)e^x+\int e^xdx=(3-x)e^x+C$	3p
	$\int_0^{\ln 2}f(x)dx=(3-\ln 2)e^{\ln 2}-3=3-2\ln 2.$	2p
c)	Pentru $x\in[1,2]$ avem:	
	$\int\frac{f(x)}{x(e^x+3x^2)}dx=\int\frac{(2-x)e^x}{x(e^x+3x^2)}dx=\int\frac{2(e^x+3x^2)-x(e^x+6x)}{x(e^x+3x^2)}dx=\int\frac{2}{x}dx-\int\frac{e^x+6x}{e^x+3x^2}dx=\ln\left(\frac{x^2}{e^x+3x^2}\right)+C$	3p
	$\int_1^2\frac{f(x)}{x(e^x+3x^2)}dx=\ln\left(\frac{4(e+3)}{e^2+12}\right)=\ln\left(\frac{a+4e}{a+e^2}\right)$, de unde obținem $a=12$	2p