

**Examenul național de bacalaureat 2021**  
**Proba E. c)**  
**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**   
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

Simulare

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	$z + \frac{13}{z} = 3 + 2i + \frac{13}{3 + 2i} = 3 + 2i + \frac{13(3 - 2i)}{9 - 4i^2} = 3 + 2i + \frac{13(3 - 2i)}{13}$ $= 3 + 2i + 3 - 2i = 6$	3p 2p
2.	$f(g(a)) = f(g(-a)) \Leftrightarrow 3g(a) - 5 = 3g(-a) - 5 \Leftrightarrow g(a) = g(-a)$ $a^2 + a = a^2 - a \Leftrightarrow a = 0$	3p 2p
3.	$3^{3x+5} = 3^2 \cdot 3^{x+1} \Leftrightarrow 3^{3x+5} = 3^{x+3}$ $3x + 5 = x + 3 \Rightarrow x = -1$	3p 2p
4.	Numărul submulțimilor lui $A$ este egal cu $2^4$ , deci sunt 16 cazuri posibile Numărul submulțimilor lui $A$ cu un număr impar de elemente este egal cu $C_4^1 + C_4^3 = 8$ , deci sunt 8 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$	2p 2p 1p
5.	$M(2, 4)$ este mijlocul segmentului $AB$ , deci $m_{CM} = -1$ $d \parallel CM \Rightarrow m_d = -1$ , deci ecuația dreptei $d$ este $y - y_A = m_d(x - x_A)$ , adică $y = -x + 4$	2p 3p
6.	$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B \Rightarrow 12 = 4 + BC^2 - 2 \cdot 2 \cdot BC \cdot \frac{1}{2}$ $BC^2 - 2BC - 8 = 0 \Rightarrow BC = 4$	3p 2p

**SUBIECTUL al II-lea**

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} 1+2x & 0 & -4x \\ 0 & a & 0 \\ x & 0 & 1-2x \end{vmatrix} = a(1+2x)(1-2x) + 4ax^2 =$ $= a(1-4x^2) + 4ax^2 = a$ , pentru orice număr real $x$	3p 2p
b)	$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1+2(x+y) & 0 & -4(x+y) \\ 0 & a^2 & 0 \\ x+y & 0 & 1-2(x+y) \end{pmatrix}, A(x+y) = \begin{pmatrix} 1+2(x+y) & 0 & -4(x+y) \\ 0 & a & 0 \\ x+y & 0 & 1-2(x+y) \end{pmatrix}$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$ $A(x) \cdot A(y) = A(x+y) \Rightarrow a^2 = a$ și, cum $a$ un număr real nenul, obținem $a = 1$	3p 2p
c)	$A(-2) \cdot A(2) = A(0) = I_3$ , deci $A(-2)$ este inversa matricei $A(2)$ $X = A(-2) \cdot A(3) \Rightarrow X = A(1) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	2p 3p
2.a)	$0 * 2021 = \log_2(2^0 + 2^{2021} - 1) = \log_2(1 + 2^{2021} - 1) =$ $= \log_2 2^{2021} = 2021$	3p 2p

<b>b)</b>	$x * e = x \Leftrightarrow \log_2(2^x + 2^e - 1) = x \Leftrightarrow 2^x + 2^e - 1 = 2^x$ , pentru orice $x \in [0, +\infty)$ , de unde obținem $2^e = 1$ , deci $e = 0 \in M$ Cum $0 * x = \log_2(1 + 2^x - 1) = x$ , pentru orice $x \in [0, +\infty)$ , obținem că $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	<b>3p</b>  <b>2p</b>
<b>c)</b>	$x * (x+1) * (x+2) = \log_2(2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} - 2)$ , $x \in M$ $\log_2(2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} - 2) = \log_2 54 \Rightarrow 7 \cdot 2^x - 2 = 54 \Rightarrow 2^x = 8$ , deci $x = 3$ , care convine	<b>3p</b>  <b>2p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+x+1}} \cdot \left( \frac{x^2+x+1}{x^2+1} \right)' =$ $= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+x+1}} \cdot \frac{(2x+1)(x^2+1) - (x^2+x+1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{2(x^2+1)\sqrt{(x^2+x+1)(x^2+1)}}, x \in \mathbb{R}$	<b>2p</b>  <b>3p</b>
<b>b)</b>	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$ <p>Dreapta de ecuație <math>y = 1</math> este asimptotă orizontală spre <math>-\infty</math> la graficul funcției <math>f</math></p>	<b>3p</b>  <b>2p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) \leq 0$ , pentru orice $x \in (-\infty, -1] \Rightarrow f$ descrescătoare pe $(-\infty, -1]$ , $f'(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in [-1, 1] \Rightarrow f$ crescătoare pe $[-1, 1]$ și $f'(x) \leq 0$ , pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ descrescătoare pe $[1, +\infty)$ $f(-1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , $f(1) = \frac{\sqrt{6}}{2}$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{6}}{2}$ , pentru orice număr real $x$ , deci $\sqrt{2} \leq f(x) + f(-x) \leq \sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}} + \sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+1}} \leq \sqrt{6}$ , pentru orice număr real $x$	<b>2p</b>  <b>3p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_1^3 (f(x) + 2 \ln x) dx = \int_1^3 (2x + 3 - 2 \ln x + 2 \ln x) dx = \int_1^3 (2x + 3) dx = \left( x^2 + 3x \right) \Big _1^3 =$ $= 9 + 9 - 1 - 3 = 14$	<b>3p</b>  <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int_1^e (2x + 3 - f(x)) dx = 2 \int_1^e \ln x dx = 2x \ln x \Big _1^e - 2 \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx =$ $= 2e - 2(e - 1) = 2$	<b>3p</b>  <b>2p</b>
<b>c)</b>	$\int_0^1 x^2 f(x^3 + 1) dx = \frac{1}{3} \int_1^2 f(t) dt = \frac{1}{3} \left( \int_1^2 (2t + 3) dt - 2 \int_1^2 \ln t dt \right) =$ $= \frac{1}{3} \left( t^2 + 3t - 2t \ln t + 2t \right) \Big _1^2 = \frac{1}{3} (4 + 6 - 4 \ln 2 + 4 - 1 - 3 - 2) = \frac{4(2 - \ln 2)}{3}$	<b>3p</b>  <b>2p</b>