Exerciţii rezolvate cu integrale nedefinite (primitive) şi integrale definite

Enunţuri

Ex.1.

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x^2+e^x, x\le 0\\ \sqrt{x}+1, x>0\end{cases}$.

a) Să se arate că funcția *f* admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze $\int_{-1}^{0} x f(x)\,dx$.

c) Să se determine volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0;1]\to\mathbb{R},\ g(x)=f(x)$.

Variante M2 bac 2009

Ex.2.

Se consideră funcţiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$ şi $F(x)=(x-1)e^x$.

a) Să se verifice că funcția F este o primitivă a funcţiei f.

b) Să se calculeze aria suprafeței plane determinate de graficul funcției f, axa Ox şi dreptele $x=0$ şi $x=1$.

c) Să se demonstreze că $\int_{1}^{x}\frac{f(t)f''(t)-(f'(t))^2}{f^2(t)}dt=\frac{x+1}{x}-2$, pentru orice $x>1$.

Variante M2 bac 2009

Ex.3.

Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}x\cdot e^x, x\le -1\\ 2+x, x>-1\end{cases}$.

a) Să se arate că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox, a graficului funcției $g:[0,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$, $x\in[0,2]$.

c) Să se calculeze $\int_{-2}^{0}\frac{x f(x)}{e}dx$.

Variante M2 bac 2009

Ex.4.

Se consideră funcţia $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=(x+1)^3-3x^2-1$.

a) Să se calculeze $\int_{0}^{1} g(x)dx$.

b) Să se determine numărul real $a>1$ astfel încât $\int_{1}^{a}\left(g(x)-x^3\right)\cdot e^x dx=6e^a$.

c) Să se calculeze $\int_{0}^{1}\left(3x^2+3\right)\cdot g^{2009}(x)dx$.

Variante M2 bac 2009

Ex.5.

Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

a) Să se arate că funcția $F:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ F(x)=2\sqrt{x}(\ln x-2)$, este o primitivă a funcției *f*.

b) Să se arate că orice primitivă G a funcției f este crescătoare pe $[1,\infty)$.

c) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=\frac{1}{e}$ și $x=e$.

Variante M1 bac 2009

Ex.6.

Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$.

a) Să se arate că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F(x)=\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right), x\in\mathbb{R}$, este o primitivă a funcției *f*.

b) Să se calculeze aria suprafeței delimitate de dreptele $x=0, x=1, Ox$ și graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=(2x+1)f(x)$.

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} f(x)dx$, unde $n\in\mathbb{N}^*$.

Variante M1 bac 2009

Rezolvări:

Ex.1.

a) Studiem continuitatea funcţiei f in punctul x=0.

$l_s = \lim_{x \nearrow 0} f(x) = \lim_{x \nearrow 0}(x^2 + e^x) = 1$

$l_d = \lim_{x \searrow 0} f(x) = \lim_{x \searrow 0}(\sqrt{x} + 1) = 1$ deci funcţia este continuă in x=0 şi deci este continuă pe **R**.

$f(0) = 1$

Rezultă că funcţia are primitive pe **R**.

b) $\int_{-1}^{0} xf(x)dx = \int_{-1}^{0} x(x^2+e^x)dx = \int_{-1}^{0}(x^3+xe^x)dx = \int_{-1}^{0} x^3dx + \int_{-1}^{0} xe^xdx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} xe^xdx = -\frac{1}{4} + \int_{-1}^{0} x(e^x)'dx =$

$= -\frac{1}{4} + \left. xe^x\right|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} e^xdx = -\frac{1}{4} + \frac{1}{e} - \left. e^x\right|_{-1}^{0} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{e} - 1 + \frac{1}{e} = \frac{2}{e} - \frac{5}{4} = \frac{8-5e}{4e}$.

c) $V(C_g) = \pi\int_0^1 g^2(x)dx = \pi\int_0^1 \left(\sqrt{x}+1\right)^2 dx = \pi\int_0^1\left(x+2\sqrt{x}+1\right)dx = \pi\left.\left(\frac{x^2}{2} + 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + x\right)\right|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{2}+\frac{4}{3}+1\right) = \frac{17\pi}{6}$.

Ex.2.

a) Funcţia F este o primitivă a funcţiei f dacă $F' = f$.

Funcţia F este derivabilă pe **R**.

$F'(x) = \left[(x-1)e^x\right]' = (x-1)'e^x + (x-1)\left(e^x\right)' = e^x + (x-1)e^x = xe^x = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ c.c.t.d.

b) $Aria = \int_0^1 f(x)dx = \left.F(x)\right|_0^1 = \left.(x-1)e^x\right|_0^1 = 1$.

c) $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$

Observăm că $\left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)' = \frac{f''(t)\cdot f(t) - f'(t)\cdot f'(t)}{\left(f(t)\right)^2} = \frac{f''(t)\cdot f(t) - \left(f'(t)\right)^2}{\left(f(t)\right)^2}$

$\int_1^x \left(\frac{f'(t)}{f(t)}\right)' dt = \left.\frac{f'(t)}{f(t)}\right|_1^x = \left.\frac{e^t(t+1)}{te^t}\right|_1^x = \left.\frac{(t+1)}{t}\right|_1^x = \frac{x+1}{x} - 2, \forall x > 1$ c.c.t.d.

Ex.3.

a) f este continuă pe intervalele $(-\infty, -1)$ şi $(-1, +\infty)$.

Studiem continuitatea in punctul x=-1.

$l_s = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} (e\cdot e^x) = e \cdot e^{-1} = 1$

$l_d = \lim_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} (2+x) = 2 - 1 = 1$

$f(-1) = 1$

deci funcţia este continuă in x=-1 şi deci este continuă pe **R**.

Rezultă că funcţia f are primitive pe **R**.

b) Volumul corpului este:

$V(C_g) = \pi\int_0^2 g^2(x)dx = \pi\int_0^2 (2+x)^2dx = \pi\int_0^2 (2+x)^2(2+x)'dx = \pi\left.\frac{(2+x)^3}{3}\right|_0^2 = \pi\left(\frac{64}{3} - \frac{8}{3}\right) = \frac{56\pi}{3}$.

c) $\int_{-2}^{0} \frac{xf(x)}{e}dx = \int_{-2}^{-1} \frac{xf(x)}{e}dx + \int_{-1}^{0}\frac{xf(x)}{e}dx = \int_{-2}^{-1} xe^xdx + \int_{-1}^{0} \frac{x(x+2)}{e}dx = I_1 + I_2$

$$I_1 = \int_{-2}^{-1} xe^x dx = \int_{-2}^{-1} x(e^x)' dx = xe^x\Big|_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1} x'e^x dx = -\frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} - e^x\Big|_{-2}^{-1} = -\frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} - \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} = \frac{3}{e^2} - \frac{2}{e}$$

$$I_2 = \int_{-1}^{0} \frac{x(x+2)}{e} dx = \frac{1}{e}\int_{-1}^{0}(x^2+2x)dx = \frac{1}{e}\left(\frac{x^3}{3} + x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0} = \frac{1}{e}\left(\frac{1}{3} - 1\right) = -\frac{2}{3e}$$

Integrala dată va fi

$$\int_{-2}^{0} \frac{xf(x)}{e} dx = \frac{3}{e^2} - \frac{2}{e} - \frac{2}{3e} = \frac{3}{e^2} - \frac{8}{3e} = \frac{9-8e}{3e^2}.$$

Ex.4.

a) $g(x) = (x+1)^3 - 3x^2 - 1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 3x^2 - 1 = x^3 + 3x$

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 (x^3+3x)dx = \left(\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{7}{4}.$$

b) $\int_1^a \left(g(x) - x^3\right)\cdot e^x dx = \int_1^a 3x\cdot e^x dx = \int_1^a 3x\cdot\left(e^x\right)' dx = 3x\cdot e^x\Big|_1^a - \int_1^a 3\cdot e^x dx = 3a\cdot e^a - 3e - 3e^x\Big|_1^a =$

$= 3a\cdot e^a - 3e - 3e^a + 3e = 3a\cdot e^a - 3e^a = 3e^a(a-1)$

Se obţine ecuaţia:

$3e^a(a-1) = 6e^a \Rightarrow a - 1 = 2 \Rightarrow a = 3$.

c) $\int_0^1 \left(3x^2+3\right)\cdot\left(x^3+3x\right)^{2009} dx = \int_0^1 \left(x^3+3x\right)'\cdot\left(x^3+3x\right)^{2009} dx = \frac{\left(x^3+3x\right)^{2010}}{2010}\Bigg|_0^1 = \frac{4^{2010}}{2010}.$

Ex.5.

a) Funcţia F este derivabilă pe $(0,+\infty)$ şi avem

$$F'(x) = \left[2\sqrt{x}\left(\ln x - 2\right)\right]' = \left(2\sqrt{x}\right)'\left(\ln x - 2\right) + 2\sqrt{x}\left(\ln x - 2\right)' = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\ln x - 2\right) + 2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{x} =$$

$= \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\ln x - 2 + 2\right) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = f(x)$ deci F este o primitivă a funcţiei f.

b) Fie G o primitivă a funcţiei f.

$G'(x) = f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} > 0, \forall x > 1$ deci G este crescătoare pe $[1,+\infty)$.

c) $Aria = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \left|f(x)\right| dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1}(-f(x))dx + \int_1^e f(x)dx = -F(x)\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + F(x)\Big|_1^e = -\left[2\sqrt{x}\left(\ln x - 2\right)\right]\Big|_{\frac{1}{e}}^{1} + \left[2\sqrt{x}\left(\ln x - 2\right)\right]\Big|_1^e =$

$= 4 - \frac{6}{\sqrt{e}} - 2\sqrt{e} + 4 = 8 - \frac{6}{\sqrt{e}} - 2\sqrt{e}$.

Ex.6.

a) $F'(x) = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)\right)' = \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)'}{1 + \left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{4x^2+4x+1}{3}} = 4\cdot\frac{1}{4x^2+4x+4} = \frac{1}{x^2+x+1} = f(x)$

deci F este o primitivă a funcţiei f.

b) $Aria = \int_0^1 (2x+1)f(x)dx = \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx = \int_0^1 \frac{\left(x^2+x+1\right)'}{x^2+x+1}dx = \ln(x^2+x+1)\Big|_0^1 = \ln 3$.

c) $\lim_{n\to+\infty} \int_{-n}^{n} f(x)dx = \lim_{n\to+\infty}\left(F(n) - F(-n)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3} arctg\left(\frac{2n+1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{2\sqrt{3}}{3} arctg\left(\frac{-2n+1}{\sqrt{3}}\right)\right) =$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{\pi}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3}\frac{\pi}{2} = \frac{2\sqrt{3}\pi}{3}.$$