

## Exerciții rezolvate cu funcții derivabile

### Enunțuri

#### Ex.1.

Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ .

- Să se calculeze derivata funcției  $f$ .
- Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .
- Să se demonstreze că  $f(x) \leq -4$  pentru orice  $x < -1$ .

Variante M2 bac 2009

#### Ex.2.

Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - e^{-x}$ .

- Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ .
- Să se arate că funcția  $f$  este crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .
- Să se calculeze  $S = g(0) + g(1) + \dots + g(2009)$ , unde  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = f'(x) - f''(x)$ .

Variante M2 bac 2009

#### Ex.3.

Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 18x^2 - \ln x$ .

- Să se determine intervalele de monotonie ale funcției  $f$ .
- Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  pentru care  $f(x) \geq a, \forall x \in (0, \infty)$ .
- Să se determine numărul de rădăcini reale ale ecuației  $f(x) = m$ , unde  $m$  este un parametru real.

Variante M1 bac 2009

#### Ex.4.

Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$ .

- Să se calculeze derivata funcției  $f$ .
- Să se determine punctele graficului funcției  $f$  în care tangenta la grafic este paralelă cu dreapta de ecuație  $9y = 2x$ .

Variante M1 bac 2009

#### Ex.5.

Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{x \ln x}$ .

- Să se arate că  $f'(x) = f(x)(1 + \ln x), \forall x > 0$ .
- Să se determine valoarea minimă a funcției  $f$ .
- Să se arate că funcția  $f$  este convexă pe  $(0, \infty)$ .

Variante M1 bac 2009

## Rezolvări

### Ex.1.

$$a) f'(x) = \left( \frac{x^2}{x+1} \right)' = \frac{(x^2)' \cdot (x+1) - (x^2) \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2x \cdot (x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}.$$

$$b) f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2$$

Tabelul de variație al funcției este:

x	-2	-1	0
f'(x)	++++ 0	-----	----- 0 +++++
f(x)	↘ f(-2) ↗		↘ ↗

Pe intervalele  $(-\infty, -2]$  și  $[0, +\infty)$  funcția este crescătoare;

Pe intervalele  $[-2, -1]$  și  $(-1, 0]$  funcția este descrescătoare;

$$c) f(-2) = \frac{4}{-1} = -4$$

Din tabelul de variație al funcției rezultă că  $f(x) \leq -4$  pentru  $\forall x < -1$ .

### Ex.2.

a) Calculăm întâi  $f'(x)$

$$f'(x) = e^x + e^{-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 2$$

b)  $f'(x) = e^x + e^{-x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  deci f este crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .

c)  $f''(x) = e^x - e^{-x}$

$$g(x) = f'(x) - f''(x) = e^x + e^{-x} - e^x + e^{-x} = 2e^{-x}$$

$$S = g(0) + g(1) + g(2) + \dots + g(2009) = 2 \left( 1 + \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} + \dots + \frac{1}{e^{2009}} \right) = 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{e}\right)^{2010} - 1}{\frac{1}{e} - 1} = 2 \cdot \frac{1 - e^{2010}}{e^{2009}(1 - e)}$$

deoarece este suma primilor 2010 termeni ai unei progresii geometrice cu primul termen egal cu 1 și rația  $\frac{1}{e}$ .

### Ex.3.

$$a) f'(x) = 36x - \frac{1}{x} = \frac{36x^2 - 1}{x}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{6} \in (0, +\infty)$$

Tabelul de variație al funcției este:

x	0	$\frac{1}{6}$	$+\infty$
f'(x)	-	0	++++
f(x)	↘ f\left(\frac{1}{6}\right) ↗		↗

Din tabel rezultă că  $x = \ln a$  este punct de minim.

Din tabelul de variație rezultă că:

- Funcția este descrescătoare pe intervalul  $\left(0, \frac{1}{6}\right]$
- Funcția este crescătoare pe intervalul  $\left[\frac{1}{6}, +\infty\right)$

b) Din tabelul de variație al funcției rezultă că  $f(x) \geq f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2} + \ln 6, \forall x > 0$ .

De aici deducem că  $a \in \left(-\infty, \frac{1}{2} + \ln 6\right]$ .

c)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (18x^2 - \ln x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (18x^2 - \ln x) \stackrel{(\infty - \infty)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(18 - \frac{\ln x}{x^2}\right) = +\infty(18 - 0) = +\infty$$

$$f''(x) = 36 + \frac{1}{x^2} > 0, \forall x > 0 \text{ deci funcția este convexă.}$$

Graficul funcției  $f$  arată ca în figura următoare:

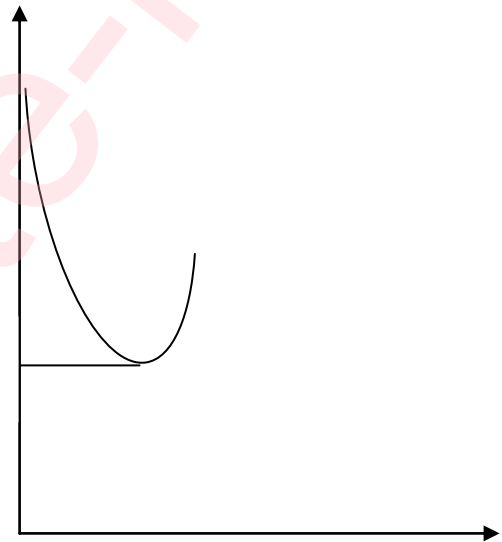
Ecuția  $f(x) = m$  se citește pe grafic. Ea are atâtea soluții câte puncte de intersecție sunt între dreapta orizontală de ecuație  $y = m$  și graficul funcției  $f$ .

**Cazul 1.** Dacă  $m > m_0 = \frac{1}{2} + \ln 6$  ecuația  $f(x) = m$  are două soluții reale diferite.

**Cazul 2.** Dacă  $m = m_0 = \frac{1}{2} + \ln 6$  atunci

ecuația  $f(x) = m$  are o singură soluție și anume  $x = \frac{1}{6}$ .

**Cazul 3.** Dacă  $m < m_0 = \frac{1}{2} + \ln 6$  ecuația  $f(x) = m$  nu are soluții reale.



#### Ex.4.

$$a) f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{(2x-2)'(x+1) - (2x-2)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{2x+2-2x+2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}, x > 0.$$

b) Două drepte sunt paralele dacă și numai dacă au aceeași pantă.

Panta tangentei este  $f'(x)$  iar panta dreptei date este  $m = \frac{2}{9}$ .

$$\text{Punctele căutate se obțin rezolvând ecuația } f'(x) = \frac{2}{9} \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2} = \frac{2}{9}$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 18x + 9 = 2x^3 + 4x^2 + 2x \Leftrightarrow 2x^3 - 5x^2 + 20x - 9 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x^2 - 2x + 9) = 0$$

Obținem că  $x = \frac{1}{2}$  este soluție a ecuației.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$$

Punctul de pe grafic este  $A\left(\frac{1}{2}, \ln\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right)$ .

c) Tabelul de variație al funcției este:

x	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+ + + + + 0 + + + + + + +			
$f(x)$	0			

Din tabel rezultă că  $f(x) \geq 0$  dacă  $x > 1$  adică  $\ln x - \frac{2(x-1)}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq \frac{2(x-1)}{x+1}, x > 1$

**Ex.5.**

a)  $f'(x) = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)' = e^{x \ln x} \cdot (\ln x + 1) = f(x)(1 + \ln x), \forall x > 0.$

b)  $f'(x) = 0 \Rightarrow e^{x \ln x} \cdot (\ln x + 1) = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$

Tabelul de variație al funcției este:

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$	
$f'(x)$	- - - - 0 + + + + + + +			
$f(x)$	$f\left(\frac{1}{e}\right)$			

Din tabelul de variație rezultă că:

- Funcția este descrescătoare pe intervalul  $\left(0, \frac{1}{e}\right]$
- Funcția este crescătoare pe intervalul  $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$

Valoarea minimă a funcției f este  $f\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{1}{e}}$ .

c)  $f''(x) = (f(x)(1 + \ln x))' = f'(x)(1 + \ln x) + f(x) \cdot \frac{1}{x} = f(x)(1 + \ln x)^2 + f(x) \cdot \frac{1}{x} = f(x) \cdot \left((1 + \ln x)^2 + \frac{1}{x}\right) > 0, \forall x > 0$

deci funcția este convexă pe  $(0, +\infty)$ .