Exerciţii rezolvate de geometrie analitică

Enunţuri

Ex.1.

Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctele $A(2,-1)$ şi $B(1,-2)$.

Variante M2 bac 2009

Ex.2.

Să se determine numărul real a, ştiind că dreptele $2x-y+3=0$ şi $ax+2y+5=0$ sunt paralele.

Variante M2 bac 2009

Ex.3.

Se consideră punctele $A(1,a)$, $B(2,-1)$, $C(3,2)$ şi $D(1,-2)$. Să se determine numărul real a, ştiind că dreptele AB şi CD sunt paralele.

Variante M2 bac 2009

Ex.4.

Să se determine ecuaţia dreptei care conţine punctul $A(1,1)$ şi este paralelă cu dreapta $4x+2y+5=0$.

Variante M2 bac 2009

Ex.5.

În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,-2)$, $B(1,2)$ şi $C(2,-1)$. Să se calculeze distanţa de la punctul C la mijlocul segmentului AB.

Variante M2 bac 2009

Ex.6.

Să se determine valorile reale ale numărului a, ştiind că distanţa dintre punctele $A(2;1)$ şi $B(7;a)$ este egală cu 13.

Variante M2 bac 2009

Ex.7.

Să se determine $m\in\mathbb{R}$, astfel încât distanţa dintre punctele $A(2,m)$ şi $B(m,-2)$ să fie 4.

Variante M1 bac 2009

Ex.8.

Să se calculeze lungimea medianei din A a triunghiului ABC, unde $A(-2,-1), B(2,0), C(0,6)$.

Variante M1 bac 2009

Ex.9.

Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(6,4)$ şi este perpendiculară pe dreapta $d: 2x-3y+1=0$.

Variante M1 bac 2009

Ex.10.

Să se determine coordonatele vârfului D al paralelogramului $ABCD$ ştiind că $A(-2,9), B(7,-4), C(8,-3)$.

Variante M1 bac 2009

Ex.11.

Să se determine coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC, ştiind că $A(-1,0)$, $B(0,2)$, $C(2,-1)$.

Variante M1 bac 2009

Ex.12.

Să se determine ecuaţia dreptei care trece prin punctul $A(-1,1)$ şi este perpendiculară pe dreapta $d: 5x-4y+1=0$.

Variante M1 bac 2009

Ex.13.

Să se calculeze distanța dintre dreptele paralele de ecuații $x+2y=6$ și $2x+4y=11$.

Variante M1 bac 2009

Rezolvări

Ex.1.

Aflăm ecuaţia dreptei cu ajutorul unui determinant:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x-4+y+1+2x-2y=0 \Leftrightarrow x-y-3=0.$$

Ex.2.

Cele două drepte sunt paralele dacă $\frac{2}{a}=-\frac{1}{2} \Rightarrow a=-4$.

Ex.3.

Dreptele AB şi CD sunt paralele dacă şi numai dacă au aceeaşi pantă:

$$\left.\begin{array}{l} m_{AB}=\frac{-1-a}{2-1}=-1-a \\ m_{CD}=\frac{-2-2}{1-3}=2 \end{array}\right\} AB \parallel CD \Leftrightarrow m_{AB}=m_{CD} \Rightarrow -1-a=2 \Rightarrow a=-3.$$

Ex.4.

Dreapta de ecuaţie $4x+2y+5=0$ se mai poate scrie astfel $2y=-4x-5 \Leftrightarrow y=-2x-\frac{5}{2}$ deci are panta $m=-2$.

Stim că două drepte paralele au pantele egale.

Pentru a obţine ecuaţia căutată folosim formula ecuaţiei dreptei care trece printr-un punct dat şi are panta dată.

$$y-y_0=m(x-x_0).$$

Obţinem $y-1=-2(x-1) \Leftrightarrow 2x+y-3=0$.

Ex.5.

Mijlocul segmentului AB este O(0,0).

$OC=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \Rightarrow \quad OC=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$.

Ex.6.

$d=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+(y_1-y_2)^2} \Rightarrow a^2-2a-143=0 \Rightarrow a\in\{-11,13\}$

Ex.7.

$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(m-2)^2+(-2-m)^2}=\sqrt{2m^2+8}=4$

$\Rightarrow 2m^2+8=16 \Rightarrow m^2=4 \Rightarrow m=\pm 2$

Ex.8.

Mijlocul segmentului BC este $M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ adică $M(1,3)$.

Lungimea medianei din A este $AM=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(1+2)^2+(3+1)^2}=5$.

Ex.9.

Dreapta d are ecuaţia $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$ şi deci are panta $m_d=\frac{2}{3}$.

Fie d' dreapta care trece prin A şi este perpendiculară pe d.

$d\perp d' \Rightarrow m_d\cdot m_{d'}=-1 \Rightarrow m_{d'}=-\frac{3}{2}$

Dreapta d' are ecuaţia dată de formula $y-y_0=m(x-x_0)$.Obţinem

$y-4=-\frac{3}{2}(x-6) \Rightarrow 2y-8=-3x+18 \Rightarrow 3x+2y-26=0$.

Ex.10.

Fie D(a,b) al patrulea varf al paralelogramului ABCD.
Diagonalele AC şi BD au acelaşi mijloc M.

M este mijlocul diagonalei AC deci $M\left(\frac{-2+8}{2},\frac{9-3}{2}\right) \Rightarrow M(3,3)$

M este şi mijlocul diagonalei BD deci $M\left(\frac{7+a}{2},\frac{-4+b}{2}\right)$

De aici rezultă că $\left.\begin{array}{l}\frac{7+a}{2}=3 \Rightarrow a=-1\\ \frac{-4+b}{2}=3 \Rightarrow b=10\end{array}\right\} D(-1,10)$

Ex.11.

$\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}=\frac{5\cdot 2+(-4)\cdot 3}{\sqrt{5^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2}}=-\frac{2}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{13}}<0$

Ex.12.

Ecuaţia dreptei d se mai poate scrie sub forma $y=\frac{5}{4}x+\frac{1}{4}$ deci dreapta d are panta $m_d=\frac{5}{4}$.

Fie d' dreapta care trece prin A şi este perpendiculară pe d.

$d\perp d' \Leftrightarrow m_d\cdot m_{d'}=-1 \Leftrightarrow \frac{5}{4}\cdot m_{d'}=-1 \Leftrightarrow m_{d'}=-\frac{4}{5}$

Dreapta d' are ecuaţia dată de formula $y-y_0=m_{d'}(x-x_0)$

$y-1=-\frac{4}{5}(x+1)$

$5y-5=-4x-4$

$\Rightarrow d':4x+5y-1=0$

Ex.13.

Luăm un punct pe prima dreaptă,de exemplu A(0,3).

Distanţa de la punctul A la cea de a doua dreaptă este $AA'=\frac{|2\cdot 0+4\cdot 3-11|}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{1}{\sqrt{20}}=\frac{\sqrt{20}}{20}=\frac{2\sqrt{5}}{20}=\frac{\sqrt{5}}{10}$.