Exerciţii rezolvate cu legi de compoziţie

Enunţuri

Ex.1.

Pe mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$ definim operaţia $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a)Verificaţi identitatea $x \circ y = (x+4)(y+4) - 4$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b)Demonstraţi că $x \circ (-4) = -4$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

c)Arătaţi că legea de compoziţie $\circ$ este asociativă.

d)Calculaţi $(-2009) \circ (-2008) \circ ... \circ 2009$.

e)Rezolvaţi in $\mathbb{R}$ ecuaţia $x \circ x \circ x \circ x = 12$.

Variante M2 bac 2009

Ex.2.

Pe mulţimea numerelor reale definim operaţia $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$.

a) Să se arate că $x \circ y = 2(x-3)(y-3) + 3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x \circ x = 11$.

c) Ştiind că operaţia "$\circ$" este asociativă, să se calculeze $1 \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ \ldots \circ \sqrt{2009}$.

Variante M2 bac 2009

Ex.3.

Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x \circ y = xy - 2(x+y) + 6$.

a) Să se arate că $x \circ y = (x-2)(y-2) + 2$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Să se demonstreze că $x \circ 2 = 2$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

c) Ştiind că legea de compoziţie „$\circ$" este asociativă, să se calculeze valoarea expresiei $E = (-2009) \circ (-2008) \circ \ldots \circ (-1) \circ 0 \circ 1 \circ 2 \circ \ldots \circ 2009$.

Variante M2 bac 2009

Ex.4.

Pe mulţimea numerelor reale se consideră legea de compoziţie $x \circ y = (x-4)(y-4) + 4$.

a) Să se determine elementul neutru al legii de compoziţie.

b) Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x \circ x \circ x = x$.

c) Să se determine două numere $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât $a \circ b \in \mathbb{N}$.

Variante M2 bac 2009

Ex.5.

Pentru a,b din mulţimea $M = [0, +\infty)$ se defineşte operaţia $a * b = \ln(e^a + e^b - 1)$.

a) Să se arate că dacă $a, b \in M$, atunci $a * b \in M$.

b) Să se arate că legea de compoziţie „$*$" este asociativă.

c) Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, să se determine $a \in M$ astfel încât $\underbrace{a * a * \ldots * a}_{\text{de } n \text{ ori } a} = 2a$.

Variante M1 bac 2009

Rezolvări:

Ex.1.

a) $(x+4)(y+4)-4=xy+4x+4y+16-4=xy+4x+4y+12=x\circ y$ şi identitatea din cerinţă este demonstrată.

b) $x\circ(-4)=(x+4)(-4+4)-4=-4, \forall x\in\mathbb{R}$.

c)Legea de compoziţie $\circ$ este asociativă dacă $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z), \forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

$$(x\circ y)\circ z=\underbrace{\left[(x+4)(y+4)-4\right]}_{a}\circ z=a\circ z=(a+4)(z+4)-4=(x+4)(y+4)(z+4)-4, \forall x,y,z\in\mathbb{R}$$

$$x\circ(y\circ z)=x\circ\underbrace{\left[(y+4)(z+4)-4\right]}_{b}=x\circ b=(x+4)(b+4)-4=(x+4)(y+4)(z+4)-4, \forall x,y,z\in\mathbb{R}$$

Din cele două relaţii de mai sus rezultă că legea $\circ$ este asociativă.

d) $(-2009)\circ(-2008)\circ\ldots\circ 2009=\underbrace{(-2009)\circ(-2008)\circ\ldots\circ(-5)}_{x}\circ(-4)\circ\underbrace{(-3)\circ\ldots\circ 2008\circ 2009}_{y}=x\circ(-4)\circ y=-4$

conform punctului b).

e) $x\circ x=(x+4)(x+4)-4=(x+4)^2-4$

$x\circ x\circ x=(x+4)^3-4$

$x\circ x\circ x\circ x=(x+4)^4-4$

Ecuaţia dată devine $(x+4)^4-4=12 \Leftrightarrow (x+4)^4-16=0 \Leftrightarrow \left[(x+4)^2-4\right]\underbrace{\left[(x+4)^2+4\right]}_{>0}=0$.

Cum $x\in\mathbb{R}$ rezultă că $(x+4)^2-4=0 \Rightarrow (x+4)^2=4 \Rightarrow x+4=\pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-2 \\ x_2=-6 \end{cases}$.

Ex.2.

2.a) $2(x-3)(y-3)+3=2(xy-3x-3y+9)+3=2xy-6x-6y+21=x\circ y, \forall x,y\in\mathbb{R}$ c.c.t.d.

b) $x\circ x=11 \Rightarrow 2x^2-12x+10=0 \Rightarrow x^2-6x+5=0$ care are soluţiile $x_1=1$ şi $x_2=5$.

c)Observăm că $x\circ 3=3\circ x=3, \forall x\in\mathbb{R}$

$$1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{9}\circ\ldots\circ\sqrt{2009}=\underbrace{1\circ\sqrt{2}\circ\sqrt{3}\circ\ldots\circ\sqrt{8}}_{x}\circ 3\circ\underbrace{\sqrt{10}\circ\ldots\circ\sqrt{2009}}_{y}=3.$$

Ex.3.

2.a) $(x-2)(y-2)+2=xy-2x-2y+4+2=xy-2x-2y+6=xy-2(x+y)+6=x\circ y, \forall x,y\in\mathbb{R}$ c.c.t.d.

b) $x\circ 2=(x-2)(2-2)+2=2, \forall x\in\mathbb{R}$.

c)Să mai observăm că şi $2\circ x=(2-2)(x-2)+2=2, \forall x\in\mathbb{R}$.

Observaţi in acea compunere rolul important al lui 2!

Utilizand proprietatea de asociativitate a operaţiei precum şi faptul că $x\circ 2=2, \forall x\in\mathbb{R}$ şi $2\circ x=2, \forall x\in\mathbb{R}$ se obţine că E=2.

$$\underbrace{E=(-2009)\circ(-2008)\circ\ldots\circ 0\circ 1}_{x}\circ 2\circ\underbrace{3\circ\ldots\circ 2009}_{y}=2.$$

Ex.4.

a)e este element neutru dacă $x\circ e=e\circ x=x, \forall x\in\mathbb{R}$.

$x\circ e=(x-4)(e-4)+4=x, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow (x-4)(e-4)-(x-4)=0, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow (x-4)(e-4-1)=0, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow e-5=0 \Rightarrow e=5.$

b) $x\circ x=(x-4)^2+4$

$x\circ x\circ x=\left[(x-4)^2+4\right]\circ x=(x-4)^2(x-4)+4=(x-4)^3+4$

Ecuaţia dată devine:

$(x-4)^3+4=x \Leftrightarrow (x-4)^3-(x-4)=0 \Leftrightarrow (x-4)\left[(x-4)^2-1\right]=0$

$(x-4)(x-4-1)(x-4+1)=0$ (am folosit formula $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$.

Obţinem ecuaţia $(x-4)(x-5)(x-3)=0$ care are soluţiile $\begin{cases} x_1=3 \\ x_2=4 \\ x_3=5 \end{cases}$.

c) $a \circ b=(a-4)(b-4)+4 \in \mathbb{N}$.

Observăm că dacă luăm $a-4=\dfrac{3}{5}$ şi $b-4=\dfrac{5}{3}$ vom obţine $a \circ b=1+4=5 \in \mathbb{N}$

Din $a-4=\dfrac{3}{5}$ obţinem $a=\dfrac{3}{5}+4=\dfrac{23}{5}$ iar din $b-4=\dfrac{5}{3}$ obţinem $b=\dfrac{5}{3}+4=\dfrac{17}{3}$.

Evident a şi b sunt numere raţionale $a,b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

Ex.5.

a)Fie $a,b \in M=[0,+\infty)$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow e^a \geq 1 \\ e^b \geq 1 \end{array}\right| \Rightarrow e^a+e^b-1 \geq 1 \Rightarrow \ln(e^a+e^b-1) \geq 0 \Rightarrow \ln(e^a+e^b-1) \in M \Rightarrow a*b \in M$$

b)Legea de compoziţie * este asociativă dacă $(x*y)*z=x*(y*z), \forall x,y,z \in M$

$$\left.\begin{array}{l} x*(y*z)=x*\left(\ln(e^y+e^z-1)\right)=\ln\left(e^x+e^y+e^z-2\right) \\ (x*y)*z=\left(\ln(e^x+e^y-1)\right)*z=\ln\left(e^x+e^y+e^z-2\right) \end{array}\right. \text{ deci legea este asociativă.}$$

c) $a*a=\ln(2e^a-1)$

$a*a*a=\ln(3e^a-2)$

Demonstrăm prin inducţie că $P(n): \underbrace{a*a*...*a}_{de\ \ n\ \ ori\ \ a}=\ln\left(ne^a-(n-1)\right), n \geq 1$ este adevărată.

<u>Etapa verificării</u>:
Pentru n=1 avem $P(1): a=a$ este adevărată.
<u>Etapa demonstraţiei</u>:
Presupunem P(k) adevărată şi demonstrăm că P(k+1) este adevărată.

$P(k): \underbrace{a*a*...*a}_{de\ \ k\ \ ori\ \ a}=\ln\left(ke^a-(k-1)\right)$ este adevărată.

$P(k+1): \underbrace{a*a*...*a}_{de\ \ k+1\ \ ori\ \ a}=\ln\left((k+1)e^a-k\right)$ trebuie demonstrată.

$\underbrace{a*a*...*a}_{de\ \ k+1\ \ ori\ \ a}=\left(\ln\left(ke^a-(k-1)\right)\right)*a=\ln\left(ke^a-(k-1)+e^a-1\right)=\ln\left((k+1)e^a-k\right)$ c.c.t.d.

Egalitatea $\underbrace{a*a*...*a}_{de\ \ n\ \ ori\ \ a}=2a$ devine $\ln\left(ne^a-(n-1)\right)=2a$

$ne^a-(n-1)=e^{2a} \Rightarrow e^{2a}-ne^a+n-1=0$ .Notăm $e^a=x$ şi obţinem ecuaţia de gradul doi $x^2-nx+n-1=0$ care are soluţiile $x_1=1$ şi $x_2=n-1$.

Revenind la notaţie , obţinem $a=0$ sau $a=\ln(n-1)$